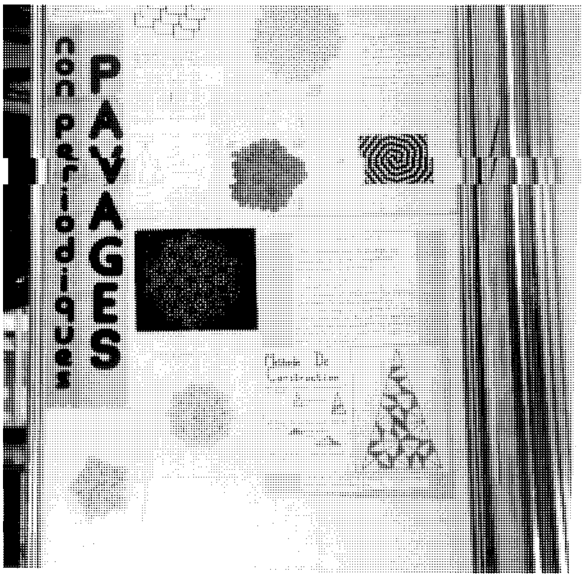
pavages non-périodiques

par …, rédigé par Gilles Chabert, des lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon

enseignants : Marie-Claude Pontille et Serge Betton

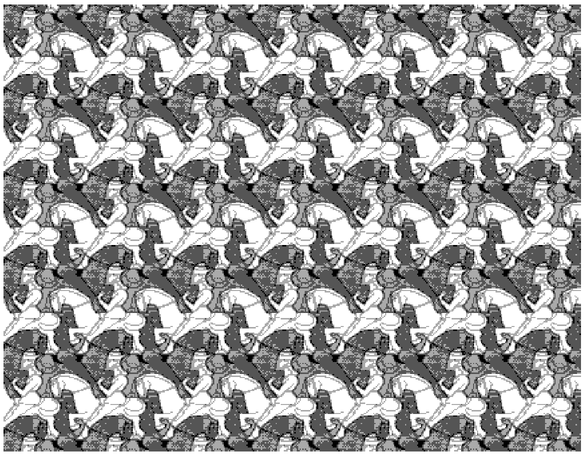
chercheur : Christian Mauduit



Présentation du sujet

un pavage périodique

On peut construire à l'aide d'une ou plusieurs pièces des pavages périodiques. Voici un exemple de pavage périodique avec 2 pièces :



papier peint de windows 3.1

On appelle ce pavage périodique car si on décalque une partie de ce pavage et qu'on déplace le calque par translation, on retrouve exactement le même motif.

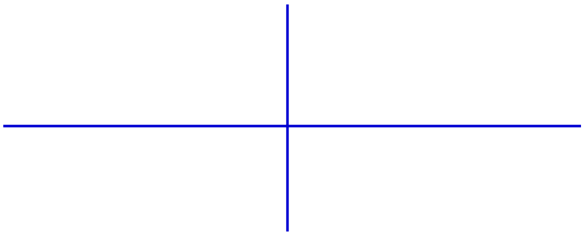
[NDLR : Pourquoi n'y a-t-il pas ici une définition précise de ce qu'est un pavage ? (avant d'en chercher des périodiques ou des non-périodiques)]

notre objectif …
est donc de trouver un pavage qui n'admet pas les propriétés du pavage périodique : un pavage non-périodique. Donc nous devons construire un pavage avec un nombre limité de pièces, qui ne permettent pas de faire un pavage périodique.

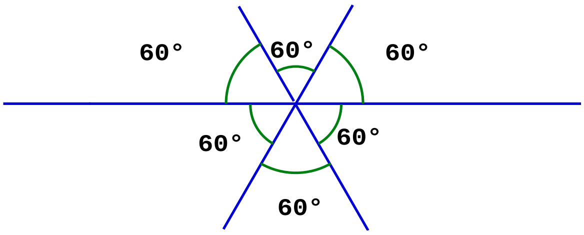
Le choix des pièces et des angles

pourquoi π/5

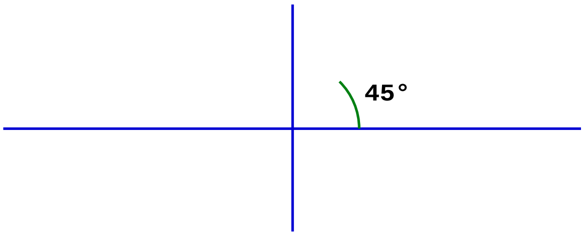
Nous avons d'abord cherché des angles de pièces qui admettent le moins de symétries. Alors on a éliminé les angles π/2, π/3, π/4 :
• π/2 étant l'angle de 90° et donc l'angle du carré qui admet beaucoup d'axes de symétrie, ne nous a pas intéressés.



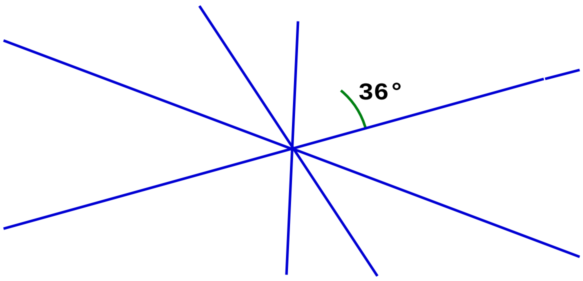
• π/3 : de même l'angle de 60° (l'angle du triangle équilatéral) ne nous intéresse pas.



• π/4 : de même 45° (la moitié de 90°) et donc pour les mêmes raisons que 90°.



Il nous reste π/5, l'angle de 36°, auquel nous n'avons trouvé aucun inconvénient.

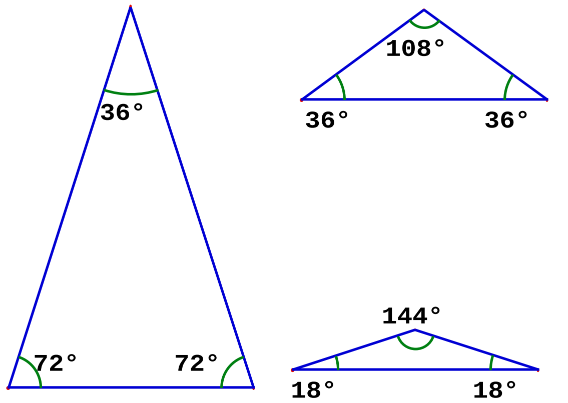


Pour avoir un maximum d'angles π/5 dans une même figure, nous avons alors choisi, pour commencer, de travailler sur les triangles isocèles.

[NDLC : ça c'est ~~Paris~~ MATh.en.JEANS ! D'accord, la rédaction n'est pas de la meilleure qualité littéraire, mais quel plaisir de lire que le carré n'est pas intéressant parce qu'il a trop de symétries ! Encore un peu et on s'intéressera aux triangles quelconques ! (L'antiracisme pénètre le monde des mathématiques ?)]

les premiers triangles

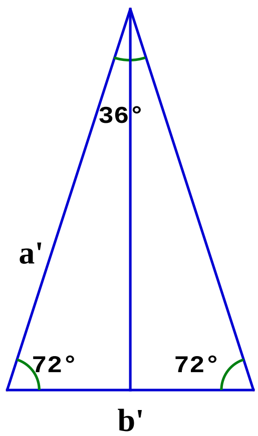
A l'aide de l'angle de 36°, nous avons construit des triangles isocèles. Nous avons aussi utilisé le double de 36°, c'est-à-dire 72°, et la moitié de l'angle de 36°, c'est-à-dire 18°. Nous avons pris la même base pour tous les triangles.



Mais nous nous sommes aperçu que les triangles étaient disproportionnés et qu'un pavage non-périodique était impossible ; nous avons donc cherché une relation entre les côtés de ces triangles.

le nombre d'or

Nous avons retenu deux triangles qui semblaient pouvoir “s'encastrer” ; et nous avons pu remarquer que le rapport de leurs côtés correspondait au nombre d'or.

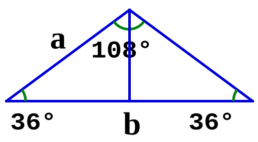


$$\cos 72° = \frac{b'/2}{a'}$$

$$\cos 72° = \frac{b'}{2\,a'}$$

$$\cos 72° \times 2 = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{b'}{a'} \approx 0{,}6180339\ldots$$



$\cos 36° = \dfrac{b/2}{a} = \dfrac{b}{2\,a}$; $\cos 36° \times 2 = \dfrac{b}{a}$

$\dfrac{b}{a} \approx 1{,}6180339\ldots$; $\dfrac{1}{0{,}6180\ldots} = 1{,},6180\ldots$

donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a'}{b'}$ d'après cette relation.

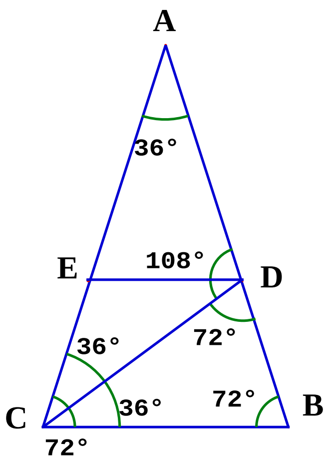
$$\boxed{\text{si } a' = b \text{ alors } b' = a}$$

En effet, nous prenons a' = b pour pouvoir assembler les triangles de façon à ce qu'ils s'encastrent plus facilement car les petits côtés sont égaux.

le découpage des triangles

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les angles sont 72°, 72° et 36°.

Si l'on trace la bissectrice de l'angle ∠ ACB (=72°), on obtient deux angles de 36°. Cette bissectrice coupe le segment [AB] en D.



On peut alors en déduire que l'angle ∠ CDB est de 180° - (∠ CBD + ∠ DCB)
= 180° - (36° + 72°) = 72°.

On remarque que ∠ CBD = ∠ DBC = 72°. Le triangle DBC est donc un triangle isocèle de sommet C dont les angles sont les mêmes que ceux du triangle initial ABC, et on pourrait, de la même façon, le découper pour obtenir un autre triangle qui aurait les mêmes mesures d'angles.

De même on peut déduire dans le triangle ADC que ∠ ACD = 36° ; comme on sait que ∠ DAC = 36°, on peut en conclure que
ACD est un triangle isocèle de sommet D.

On pourrait découper ce triangle, en traçant une droite qui couperait ∠ ADC en deux angles tels que

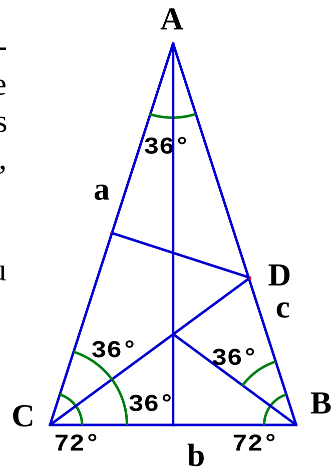
∠ ADE = 72° et ∠ EDC = 36°.

On obtiendra alors deux autres triangles qui possèderont les mêmes angles.

le rapport entre les côtés

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les angles sont 72°, 72° et 36°.

Soit a la mesure du grand côté.



Calculons la base b de ABC en fonction de a :

$$\cos 72° = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2\,a}$$

$$b = 2\,a \cos 72°$$

$$b = 2\,a \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) = a \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

$$b = \frac{a\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}{2\left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{4\,a}{2\left(\sqrt{5} + 1\right)} = \frac{2\,a}{\sqrt{5} + 1}$$

La bissectrice de l'angle ∠ ACB coupe [AB] en D. Dans le triangle ADC, calculons le côté AD :

$$\cos 36° = \frac{a/2}{AD} = \frac{a}{2\,AD}$$

$$a = 2\,AD \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right) = AD \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

$$AD = \frac{2\,a}{\sqrt{5} + 1} \text{ donc } AD = b$$

Dans le triangle BDC isocèle de sommet C, calculons c en fonction de b.
[c = a - b.]

$$\cos 72° = \frac{c/2}{b} = \frac{c}{2\,b}$$

$$c = 2\,b \cos 72°$$

$$c = b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$c = \frac{b\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{2\,b}{\sqrt{5}+1}$$

$$\boxed{c = \frac{2\,b}{\sqrt{5}+1}}$$

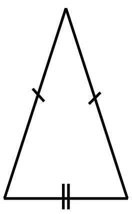
On remarque alors que le rapport entre les côtés est toujours le même : $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$.

$$\frac{\text{a (grand côté)}}{\text{b (petit côté)}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

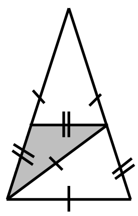
c'est le nombre d'or.

Nous avons pu en déduire une ***méthode de construction***.

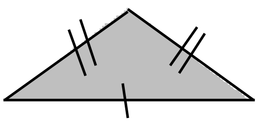
• Chaque fois que l'on a une pièce de la forme



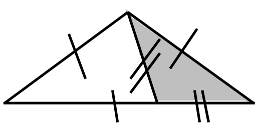
on la remplace par :



• Chaque fois que l'on a une pièce de la forme

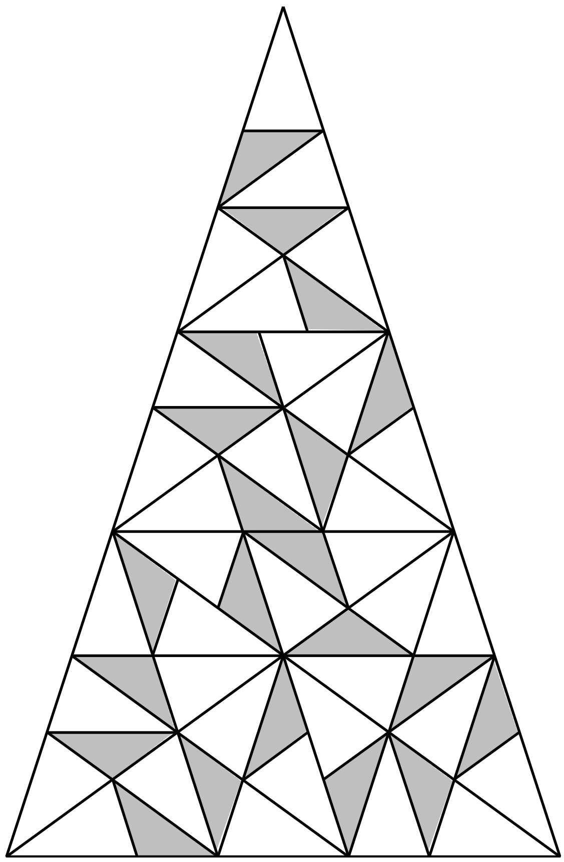


on la remplace par :



Ainsi, il nous semble que l'on peut construire un pavage à l'infini.

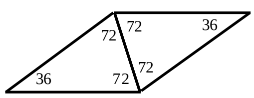
Voici [colonne de droite] le pavage que nous obtenons, mais il semble pourtant que nous pourrions faire un pavage périodique avec ces pièces.

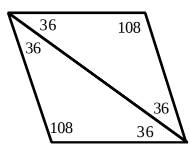


des pavages

“Penrose”

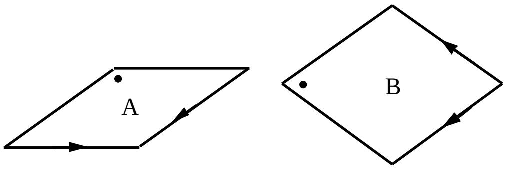
A l'aide des deux triangles isocèles (72°, 72° et 36° ; 36°, 36° et 108°), nous avons essayé de trouver d'autres pavages. Nous avons ainsi assemblé deux triangles isocèles identiques afin de faire un losange, et ceci pour les deux triangles.



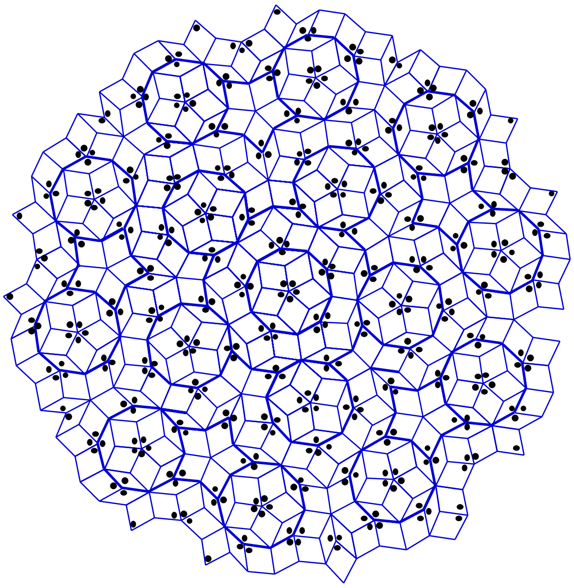


Pour pouvoir construire un pavage non périodique à l'aide de ces deux pièces, il a fallu trouver des conditions de manière à ce que le pavage ne puisse être rendu périodique.

Nous avons alors posé des conditions :
— nous avons donné un sens au côté ;
— nous avons marqué un angle (tous les angles marqués doivent être réunis.

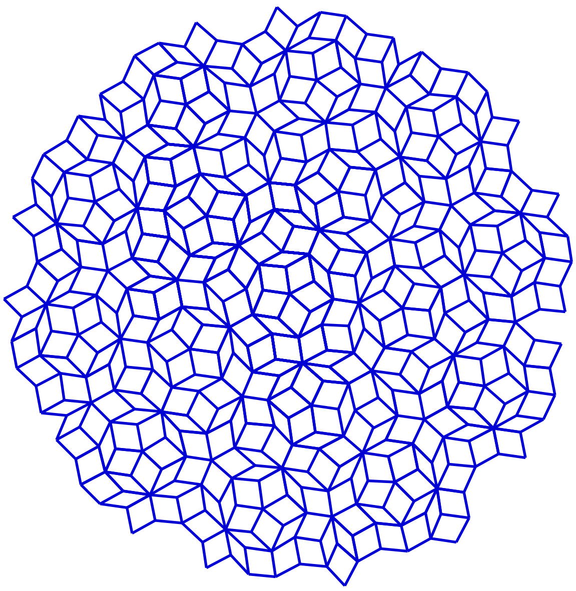


Ces conditions permettent d'assembler les pièces, en évitant de réaliser un pavage périodique.



[NDLR : les flèches surchargeraient le dessin sans apporter d'information capitale, elles n'apparaissent donc pas sur ce dessin.]

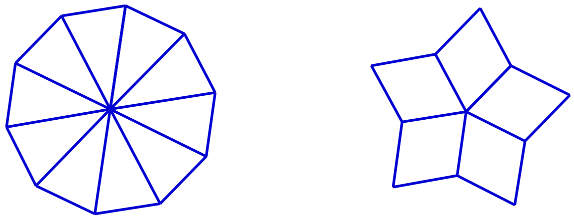
[Le même dessin où angles et côtés ne sont pas marqués … étrange impression de cubes dans des perspectives dignes de Escher …]



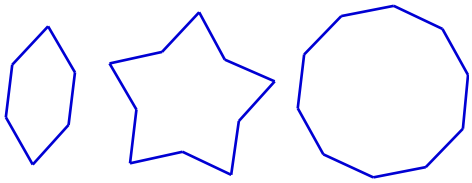
pavage autour d'un centre

Toujours avec les mêmes triangles, nous avons créé d'autres pièces.

un décagone une étoile

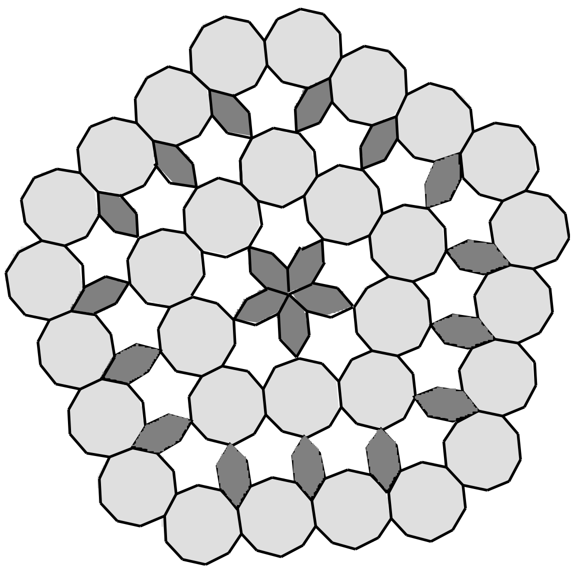


En assemblant ces deux pièces pour faire un pavage, nous avons découvert un “trou” qui se reproduisait. Nous avons donc créé une troisième pièce pour ce “trou”.



Nous avons pris l'une des trois pièces (étoile, décagone, ou “trou”) comme centre et nous avons essayé de construire des couronnes.

Cependant, nous n'avons pu démontrer que le pavage est non périodique, que l'on ne peut pas refaire un pavage périodique avec ces pièces et nous ne sommes pas sûrs qu'il pave le plan jusqu'à l'infini.



[NDLC : le même “trou” apparaît aussi dans le pavage de gauche ; il est constitué de deux pièces de type A et d'une pièce de type B ; noircissez ces “trous”, vous ferez (entre autres) apparaître le centre du pavage de droite.]