

# la géométrie par les formules

par Sylvain Packan (1<sup>ère</sup> S), Annabelle Tzafa (2<sup>nde</sup>), Marc Urban (T<sup>le</sup> C), élèves des lycées Jean Racine de Paris et Georges Braque d'Argenteuil

enseignants : Pierre Audin, Joëlle Richard, Christine Rouaud

chercheur : Jean-Pierre Bourguignon, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

sujet proposé par Jean-Pierre Bourguignon : La géométrie derrière les formules

La trigonométrie a pour objet (comme l'analyse de son nom l'indique) la détermination des propriétés métriques des triangles. En effet, grâce aux formules de trigonométrie, il est possible de déterminer toutes les mesures d'un triangle (longueurs des côtés, mesures des angles, etc.) à partir d'un certain nombre d'entre elles (c'est ce qu'on appelle "résoudre le triangle"). Comme cette trigonométrie s'applique aux triangles plans, elle mérite d'être appelée **trigonométrie plane**.

Il existe d'autres trigonométries, pour lesquelles les formules fondamentales de détermination des mesures d'un triangle sont des modifications de celles de la trigonométrie plane. La plus naturelle est celle des triangles sphériques dont l'étude se présente naturellement à toute personne intéressée par l'astronomie puisque la voûte céleste se présente à nous comme une hémisphère. Le phénomène fondamentalement nouveau que l'on rencontre dans les triangles sphériques est que la somme de leurs angles ne vaut plus 180 degrés mais dépend de l'aire enclose par le triangle. Il existe cependant une **trigonométrie sphérique** qui permet la résolution des triangles sphériques en tous points analogue à celle des triangles plans.

Au siècle dernier un mathématicien allemand, Taurinus, s'est rendu compte qu'il était possible de modifier les formules de la trigonométrie sphérique en continuant d'avoir la cohérence que l'on rencontre dans celle-ci en introduisant des fonctions autres que les sinus et cosinus (qui ont depuis pris le nom de cosinus hyperbolique et de sinus hyperbolique). Il a dérivé un ensemble de formules qui se comportent comme s'il existait effectivement un espace dans lequel ces formules donneraient la résolution des triangles tracés dans cet espace. C'est la découverte de cette géométrie qui est le but de la recherche ... en partant seulement des formules et en procédant par analogie avec la géométrie sphérique et ses relations avec la géométrie plane.

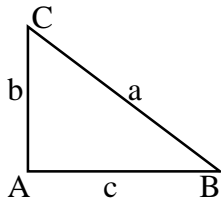
Lorsqu'en début d'année, le chercheur nous a présenté ce sujet, ces deux mots associés : "géométrie/formules" ont tout de suite attiré l'attention de cinq d'entre nous. D'abord, ce sujet nous paraît plus mathématique et d'autre part, qu'y a-t-il derrière ce doublet : relation ou opposition, ou même interaction ? Nous connaissons déjà la trigonométrie plane qui mêle la géométrie et les calculs. Nous sommes enthousiasmés à l'idée de découvrir des relations (si elles existent) dans d'autres géométries (si elles existent aussi!). Dans le plan, on sait "résoudre" un triangle, c'est-à-dire déterminer tous ses éléments (angles et mesures de côtés) quand on en connaît trois,

par exemple. Une question se pose alors : peut-on trouver en modifiant les formules de trigonométrie plane, des relations entre angles et côtés d'un triangle dessiné sur une sphère ?

L'eau nous monte à la bouche en entendant le chercheur nous vanter les mérites de TAURINUS, mathématicien allemand du XIX<sup>ème</sup> siècle, qui s'était attelé à ce problème. L'idée géniale de TAURINUS, au siècle dernier, est de modifier ces formules de la trigonométrie sphérique tout en gardant leur cohérence et en introduisant des fonctions nouvelles autres que le sinus et le cosinus. Ces formules permettent-elles de "résoudre" un triangle sur une autre surface ? Nous nous lançons dans cette recherche et nous espérons vous faire partager notre plaisir d'avoir atterri sur un hyperboloïde.

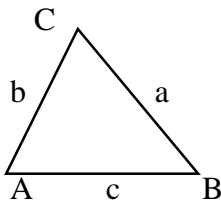
Pour raviver vos souvenirs ou pour vous informer, voici les formules trigonométriques utilisées couramment en géométrie plane :

Dans un triangle rectangle ABC



$$\begin{aligned} b &= a \sin B & b &= a \cos C \\ c &= a \sin C & c &= a \cos B \end{aligned}$$

Dans un triangle quelconque ABC



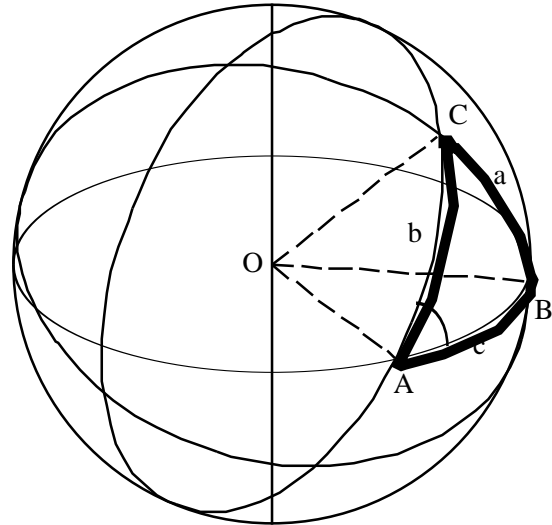
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba \cos C \end{aligned}$$

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$$

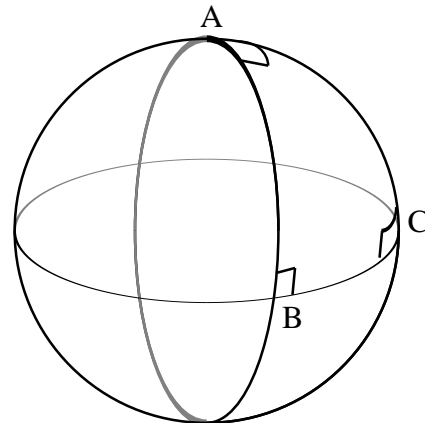
Le plan étant une surface trop classique, nous vous proposons un petit détour sur la sphère. Nous allons nous promener le long d'un triangle sphérique : c'est un triangle déterminé par trois segments de géodésiques de la sphère (des portions de grands cercles) qui se coupent en A, B, C.

Une géodésique est le chemin le plus court entre deux points d'une surface.

Ce qu'il y a de nouveau par rapport au plan, c'est que les mesures des côtés, a, b, c, sont aussi mesurées en unités d'angles. Si la sphère a pour rayon 1,  $a = \angle BOC$ . L'angle  $\angle A$  du triangle sphérique est l'angle des plans des grands cercles passant respectivement par AOC et AOB.



Ce qu'il y a de nouveau aussi, c'est que l'on peut trouver des triangles ayant 3 angles droits !

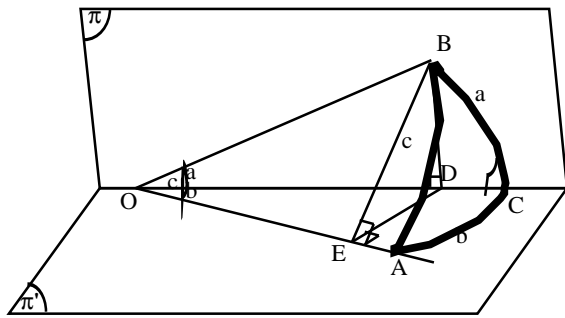


On peut par exemple montrer que

$$180 \text{ degrés} < A + B + C < 900 \text{ degrés.}$$

Nous n'allons pas vous donner toutes les démonstrations que nous avons faites cette année, mais vous indiquer les démarches et méthodes utilisées pour certaines d'entre elles.

Par exemple, dans un triangle sphérique rectangle :



Dans le triangle BDO, qui est rectangle en D, on a :  $\sin a = DB/OB = (DB/EB) \times (EB/OB)$ . Or dans le triangle BED rectangle en D, on a :  $(DB/EB) = \sin A$ . Et dans le triangle OBE, on a :  $(EB/OB) = \sin c$ . On obtient donc :  $\sin a = \sin A \cdot \sin c$ .

Par des méthodes analogues, on obtient les formules :

1.  $\sin a = \sin A \sin c$
2.  $\tan a = \tan A \sin b$
3.  $\tan a = \cos B \tan c$
4.  $\cos c = \cos b \cos a$
5.  $\cos A = \sin B \cos a$
6.  $\sin b = \sin B \sin c$
7.  $\tan b = \tan B \sin a$
8.  $\tan b = \cos A \tan c$
9.  $\cos c = \cotan A \cotan B$
10.  $\cos B = \sin A \cos b$

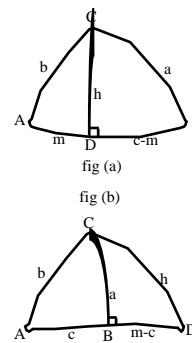
Le triangle sphérique est dit quelconque si aucun de ses 6 éléments (3 longueurs, 3 angles) n'a la même mesure. Comme dans les triangles sphériques rectangles, nous pouvons établir des formules qui s'appliquent aux sphériques quelconques. En voici quelques-unes :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned}$$

Voici comment nous les avons obtenues :



ABC est un triangle sphérique quelconque. Par C, on mène un grand cercle perpendiculaire à AB le coupant en D. On pose  $CD=h$ . Dans le triangle rectangle BCD :

$$\sin h = \sin b \cdot \sin A.$$

Dans le triangle BCD,  $\sin h = \sin a \cdot \sin B$ . Alors :

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$$

et  $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B$ .

De manière analogue, en faisant passer un grand cercle par B perpendiculaire à AC, nous trouvons :  $\sin a / \sin A = \sin c / \sin C$ . Ainsi :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Etablissons la formule du cosinus pour les côtés. Sur les figures (a) et (b) ci-dessus, soit  $AD = m$ .

Dans le triangle rectangle ACD :

- (1)  $\sin m = \tan h \cdot \cotan A,$
- (2)  $\sin h = \sin b \cdot \sin A,$
- (3)  $\cos a = \cos h \cdot \cos m.$

Dans le triangle rectangle BCD :

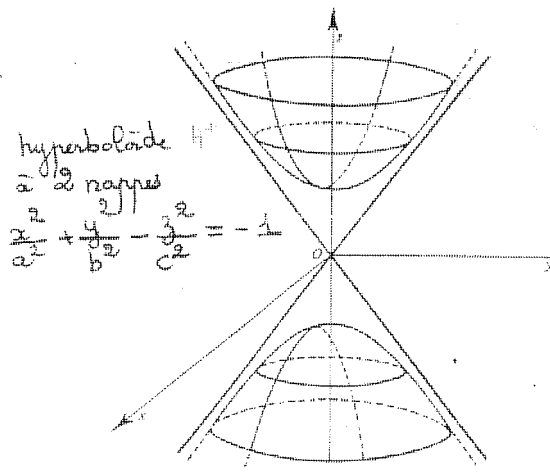
$$(4) \cos a = \cosh \cdot \cos(c-m) = \cosh(\cos c \cdot \cos m + \sin c \cdot \sin m),$$

puisque  $\cos(c-m) = \cos(m-c)$ .

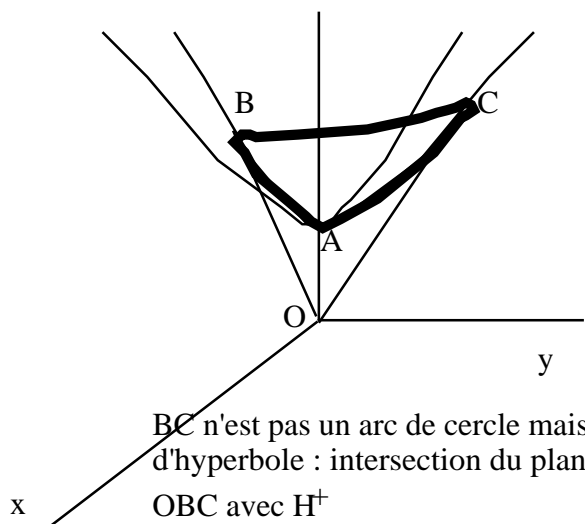




Un hyperboloïde est engendré par la rotation d'une hyperbole autour d'un de ses axes de symétrie.



Un triangle sera dit hyperbolique s'il est limité par 3 géodésiques (comme pour un triangle sphérique sur une sphère). Or une géodésique sur l'hyperboloïde est obtenue en prenant la courbe d'intersection de cet hyperboloïde avec un plan passant par O. Nous avons essayé de retrouver dans un triangle hyperbolique ABC les formules de trigonométrie comme celles trouvées plus haut.



Soit par exemple l'hyperboloïde  $H^+$  d'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

Nous avons fait les calculs dans un cas simple, pour un triangle hyperbolique rectangle isocèle ABC. Il est rectangle en A. A est le point (0, 0, 1). L'arc AB est un arc d'hy-

perbole  $H_1$  dans le plan xoz. L'arc AC est un arc d'hyperbole  $H_2$  dans le plan yoz. L'arc BC est un arc d'hyperbole  $H_3$  dans un plan passant par O.

Dans xoz, l'équation de  $H_1$  s'écrit :

$$x^2 - z^2 = -1$$

Dans yoz, l'équation de  $H_2$  s'écrit :

$$y^2 - z^2 = -1$$

Le plan P passe par O et rencontre l'hyperboloïde en une hyperbole d'arc BC. Par analogie avec la distance de 2 points sur la sphère, la distance de 2 points de  $H^+$  s'obtient en faisant la différence des paramètres "hyperboliques" sur l'hyperbole les joignant dans le plan P.

Dans le plan yoz, l'hyperbole qui contient A et C est paramétrée par :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \text{sh } t \\ z &= \text{ch } t \end{aligned}$$

On a bien :

$$y^2 - z^2 = -1.$$

De même dans le plan xoz on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \text{sh } t \\ y &= 0 \\ z &= \text{ch } t, \text{ donc :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &(0, 0, 1) \\ B &(\text{sh } t, 0, \text{ch } t) \\ C &(0, \text{sh } t, \text{ch } t) \end{aligned}$$

Les côtés et les "angles" du triangle ABC sont respectivement :

$$\begin{aligned} b &= t = c \\ a &= T(c) - T(b), \end{aligned}$$

T(c) et T(b) étant les paramètres hyperboliques des points B et C que nous déterminons plus tard.

Les angles :

A est un angle droit.  
B = C par symétrie.

Nous allons déterminer leur cosinus.

$\cos C = \cos (V_2, V_3)$  où  $V_2$  et  $V_3$  sont des vecteurs directeurs des tangentes aux hyperboles  $H_2$  et  $H_3$  portant les arcs AC et BC.

Déterminons  $V_2$  et  $V_3$ .

$V_2$  : vecteur directeur de la tangente à  $H_2$  en C. Or C a pour coordonnées : 0, sht, cht.  $V_2$  a pour coordonnées : 0, cht, sht. Ce sont les dérivées des coordonnées de C.  $V_3$  est un vecteur directeur de l'intersection du plan P contenant OBC et du plan affine tangent à  $H^+$  en C dont l'équation est de la forme :

$$X_C(X-X_C) + Y_C(Y-Y_C) - Z_C(Z-Z_C) = 0$$

L'équation du plan P(OBC) est :

$$x + y - \text{tht}.z = 0 \quad (\text{tht} = \text{sht} / \text{cht})$$

L'équation du plan affine tangent à  $H^+$  en C est :

$$\text{sht} (y - \text{sht}) - \text{cht} (z - \text{cht}) = 0$$

La droite d'intersection des 2 plans a pour équations :

$$\begin{aligned} y.\text{sht} - \text{cht}.z - \text{sh}^2(t) + \text{ch}^2(t) &= 0 \\ x + y - \text{tht}.z &= 0 \end{aligned}$$

On tient compte de  $\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1$ . On obtient les équations de la droite D :

$$\begin{aligned} y &= (1/\text{tht}).z - (1/\text{sht}) \\ x &= (\text{tht}-1/\text{tht}).z + 1/\text{sht} \end{aligned}$$

droite dont un vecteur directeur est :

$$V_3 (\text{tht} - 1/\text{tht}, 1/\text{tht}, 1).$$

Donc on aura :

$$V_3 (\text{th}^2t - 1, 1, \text{tht})$$

soit encore :

$$V_3 (-1/\text{ch}^2t, 1, \text{tht}).$$

On peut donc maintenant calculer  $\cos(V_2, V_3)$  en utilisant la formule :

$$\cos (V_2, V_3) = \frac{V_{2x}V_{3x} + V_{2y}V_{3y} - V_{2z}V_{3z}}{\sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2 - V_{2z}^2} \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2 - V_{3z}^2}}$$

ce qui donne :

$$\cos (V_2, V_3) = \frac{\text{ch } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}}$$

$$\text{On a donc : } \cos C = \frac{\text{ch } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} .$$

Essayons de retrouver une formule de trigonométrie hyperbolique dans le triangle rectangle ABC analogue à l'une des formules de trigonométrie sphérique dans un triangle ABC rectangle aussi en A.

On sait qu' on a par exemple :

$$\tan b = \cos C . \tan a.$$

On devrait trouver dans le triangle hyperbolique rectangle ABC :

$$\text{th } b = \cos C . \text{th } a. \tag{E}$$

Il nous faut déterminer  $\text{th } a$ , c'est-à-dire  $\text{th}(T(b)-T(c))$ .

Pour cela reportons nous à la géodésique portant l'arc BC dans le plan OBC. Elle est définie par les 2 équations :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= -1 \\ x + y - \text{tht}.z &= 0 \end{aligned}$$

Posons :

$$x + y = u \text{ et } x - y = v.$$

$$\text{Alors : } x = (u + v)/2 \text{ et } y = (u - v)/2$$

On obtient donc le système :

$$(1) \quad \frac{(u+v)^2}{4} + \frac{(u-v)^2}{4} - z^2 = -1$$

$$(2) \quad \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} - \text{th } t \cdot z = 0$$

La deuxième égalité équivaut à :  $u = \text{th } t \cdot z$ . Si on élève au carré :  $u^2 = \text{th}^2(t) \cdot z^2$ . On multiplie (1) par  $\text{th}^2(t)$ , alors on a :

$$\text{th}^2 t + \left[ \left( \frac{u+v}{2} \right)^2 + \left( \frac{u-v}{2} \right)^2 \right] - u^2 = -\text{th}^2 t$$

Ce qui donne après transformation :

$$u^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{th}^2 t} \right) + \frac{v^2}{2} = -1$$

de la forme :

$$\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\text{th}^2 t} \right)} = -1 \quad (3)$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{th}^2 t} - \frac{1}{2} &= \frac{2 - \text{th}^2 t}{2 \text{th}^2 t} \\ &= \frac{1 + 1 - \text{th}^2 t}{2 \text{th}^2 t} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\text{ch}^2 t}}{2 \text{th}^2 t} \\ &= \frac{1 + \text{ch}^2 t}{2 \text{sh}^2 t} \end{aligned}$$

(3) est donc de la forme :

$$\frac{v^2}{A^2} - \frac{u^2}{B^2} = -1 \text{ avec } A = \sqrt{2} \text{ et } B = \frac{\sqrt{2} \text{ sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}}$$

Posons maintenant :

$$v = \sqrt{2} \text{ sh } T \text{ et } u = \frac{\sqrt{2} \text{ sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \text{ ch } T$$

On retrouve bien  $\text{sh}^2(T) - \text{ch}^2(T) = -1$  ; T est le paramètre "hyperbolique" sur l'hyperbole  $H_3$ .

Or

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} \\ \text{donc } x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\text{sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \text{ ch } T + \text{sh } T \right) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\text{sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \text{ ch } T - \text{sh } T \right) \end{aligned}$$

Au point B,  $y = 0$ . Donc :

$$\text{th}(T_B) = \frac{\text{sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \quad (4)$$

Au point C,  $x = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} \text{th}(T_C) &= \frac{-\text{sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \\ \text{th}(T_B) &= -\text{th}(T_C) \text{ donc } \text{th}(T_B - T_C) = \text{th}(2T_B) \end{aligned}$$

Or nous cherchons à déterminer  $\text{th } a$  avec  $a = T(b) - T(c)$  d'où :

$$\begin{aligned} \text{th } a &= \text{th}(2T_B) = \frac{\text{sh}(2T_B)}{\text{ch}(2T_B)} \\ \text{th } a &= \frac{2 \text{sh } T_B \text{ ch } T_B}{\text{ch}^2 T_B + \text{sh}^2 T_B} = \frac{2 \text{th } T_B}{1 + \text{th}^2 T_B} \end{aligned}$$

D'après (4) on a :

$$\begin{aligned} \text{th } a &= \frac{2 \text{sh } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \times \frac{1}{1 + \frac{\text{sh}^2 t}{1 + \text{ch}^2 t}} \\ &= \frac{2 \text{sh } t \left( 1 + \text{ch}^2 t \right)}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t} \times 2 \text{ch}^2 t} \\ &= \frac{\text{sh } t \sqrt{1 + \text{ch}^2 t}}{\text{ch}^2 t} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos C = \frac{\text{ch } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}}$$

$$\begin{aligned} \cos C \text{ th } a &= \frac{\text{ch } t}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 t}} \times \frac{\text{sh } t \sqrt{1 + \text{ch}^2 t}}{\text{ch}^2 t} \\ &= \text{th } t \end{aligned}$$

Or  $b = t$ . On a bien :

$$\text{th } b = \cos C \cdot \text{th } a,$$

ce que l'on cherchait à obtenir. Cette formule est à rapprocher de la formule de trigonométrie sphérique :

$$\tan b = \cos C \cdot \tan a$$

Il nous reste à retrouver ces formules de trigonométrie hyperbolique dans un triangle hyperbolique quelconque. Ces "angles" que l'on considère ici ne sont pas les mêmes angles que dans la géométrie sphérique ordinaire, ce qui rend les calculs plus difficiles.



[document : lettre adressée par Jean-Pierre Bourguignon aux élèves, au cours de leurs recherches, le 20 février 1993 (extrait) :]

« Je propose que vous partiez de l'hyperboloïde  $H$  d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  (plutôt que de celui dont vous vouliez partir, l'avantage étant qu'en plaçant le signe - devant  $z$ ,  $x$  et  $y$  peuvent être pris comme coordonnées sur la partie  $H+$  de  $H$  d'altitude  $z$  positive).

Pour établir votre géométrie, il faut autant que possible copier les constructions faites sur la sphère (et que vous aviez bien comprises, me semble-t-il). Je vais détailler les quelques points qui peuvent a priori vous dérouter. Le tout reste très simple comme vous allez le voir.

Tout d'abord les côtés des triangles sphériques sont obtenus comme portions de grands cercles (qui sont en fait les géodésiques de la sphère). Or les grands cercles de la sphère sont obtenus en coupant la sphère avec des plans passant par l'origine. Remarquons qu'en prenant deux points sur la sphère il y a toujours un plan passant par l'origine qui contient ces deux points ; il est en général unique sauf si les deux points sont diamétralement opposés.

Nous établissons l'analogie avec  $H+$  : si nous prenons deux points  $p$  et  $q$ , ils déterminent avec l'origine un unique plan  $P$  qui coupe  $H+$  suivant une courbe (en fait une hyperbole du plan  $P$  comme on le voit facilement car, si l'équation du plan  $P$  est  $a x + b y + c z = 0$ , on peut substituer à  $x$  ou à  $y$  dans l'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  son expression tirée de l'équation du plan en remarquant que  $a$  et  $b$  ne peuvent être tous deux nuls puisque  $P$  contient des points dont l'altitude est positive). On démontre que cette courbe joignant  $p$  à  $q$  est un plus court chemin entre deux quelconques de ses points (à la différence de ce qui se passe sur la sphère, elle ne se recoupe pas elle-même). Ces courbes planes vont jouer le rôle des grands cercles sur la sphère. De même que la distance sur la sphère s'obtient en prenant la différence des valeurs des paramètres

“angulaires” sur le grand cercle qui contient les deux points, la distance des deux points de  $H+$  s'obtient en prenant la différence des paramètres “hyperboliques” (i.e. ceux qui vérifient  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ) sur l'hyperbole les joignant dans le plan  $P$ .

La partie de la construction qui est la plus surprenante, au moins la première fois qu'on la rencontre, est celle qui donne la mesure des angles au sommet du triangle “hyperbolique”.

On détermine d'abord les vecteurs tangents aux deux côtés issus d'un sommet du triangle, par exemple  $p$ . Pour cela deux méthodes sont possibles :

— soit prendre l'intersection en  $p$  entre le plan  $P$  et le plan affine tangent à  $H+$  en  $p = (x_p, y_p, z_p)$  dont l'équation s'obtient en dérivant l'équation définissant  $H+$  soit  $x_p(x - x_p) + y_p(y - y_p) - z_p(z - z_p) = 0$ .

— soit donner une représentation paramétrique du côté du triangle  $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$  et calculer le vecteur-vitesse de cette trajectoire. On dispose alors de deux vecteurs  $v = (v_x, v_y, v_z)$  et  $w = (w_x, w_x, w_z)$  au point  $p$  dont l'angle est alors estimé par la formule

$$\cos \langle v, w \rangle = \frac{v_x w_x + v_y w_y - v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - v_z^2} \sqrt{w_x^2 + w_y^2 - w_z^2}}$$

Cette formule, a priori surprenante, est la copie conforme de celle que nous pourrions utiliser sur la sphère (si nous n'utilisions pas implicitement que l'on peut calculer les angles comme d'habitude dans l'espace euclidien ordinaire) à condition de remplacer le produit scalaire “habituel”

$$(v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)$$

par le produit scalaire dit “lorentzien” (i.e. avec un signe - devant les composantes en  $z$ ) ce qui est obligatoire car nous ne regardons pas la sphère dont l'équation est  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  mais l'hyperboloïde dont l'équation est  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . (...)