# les brenoms

rédigé par Perrine Allain, Classe de 5ème, collège Pierre de Ronsard de Montmorency (jumelage entre des élèves de 6ème-5ème du collège Pierre de Ronsard, de Montmorency et du collège l'Ardillière de Nézant, de Saint Brice sous Forêt)

enseignants : Vincente Bartoli, Yann Bourit, Catherine Mandonnet

chercheur : Pierre Duchet, CNRS

Les brenoms sont des choses [NDLC : c'est clair, ça, des *choses* …] qui généralisent les nombres entiers ordinaires (un nombre entier est une succession *finie* de chiffres, un morceau de brenom), et qui peuvent donc nous fournir de nouveaux outils. Les brenoms en base différente de 10, appelé les nombres p-adiques, sont beaucoup étudiés ; ils permettent, entre autres, de comprendre des propriétés des nombres entiers ordinaires et de fabriquer des codes secrets.

Un brenom est une succession illimitée de chiffres écrite de droite à gauche. Exemple :

**…562951413**

On peut additionner et multiplier les brenoms de la manière habituelle, puisque ces opérations (sur les nombres) se font de droite à gauche. Vous remarquerez que la multiplication habituelle des nombres (avec une suite illimitée — à droite — de décimales) est plus difficile à effectuer :

$$3{,}14159265\ldots \times 3{,}14159265\ldots = ???$$

*Sujet de recherche proposé :*

existe-t-il des brenoms qui, multipliés par eux-mêmes, ne changent pas ?

***Qu’est-ce qu’un brenom ?***

Un brenom est composé d’une infinité de chiffres débutant à droite et se poursuivant vers la gauche.

*Exemple :* …1257305895.

***L’addition des brenoms***

Elle se fait comme une addition normale.

*Exemple :*

$$\begin{array}{r} \ldots256289 \\ \underline{\ldots476123} + \\ \ldots732412 \end{array}$$

Tout brenom a un *opposé* c’est à dire qu’un brenom peut toujours être ajouté à un autre brenom pour que leur somme soit ...0.

*Exemple :*

$$\begin{array}{r} \ldots36925 \\ \underline{\ldots63075} + \\ \ldots00000 \end{array}$$

***La soustraction des brenoms***

Elle peut se faire normalement, mais, *surprise*, on peut effectuer :

$$\begin{array}{r} \ldots2396 \\ \underline{\ldots7485} - \\ \ldots4911 \end{array}$$

C’est possible car un brenom a une infinité de chiffres, donc on peut avoir une infinité de retenues. La soustraction étant toujours possible, on n’a pas besoin de brenoms négatifs.

***Multiplication des brenoms***

Elle se fait comme une multiplication normale. *Exemple :*

$$\begin{array}{r} \ldots1634 \\ \underline{\ldots25} \times \\ \ldots8170 \\ \ldots3268\phantom{0} \\ \underline{\ldots\ldots\phantom{00}} \\ \ldots\ldots50 \end{array}$$

**[1]**

*Peut-on trouver un brenom tel que:* $x^2 = x$ ?

[NDLR : l'écriture $x^2$ représente le résultat de la multiplication de x par x et s'appelle le *carré de x*.]

OUI, il en existe 4 !

[NDLR : ***Théorème*** : Il existe exactement 4 brenoms tels que $x^2 = x$.]

Ces brenoms peuvent commencer à droite par …

0 car $0 \times 0 = 0$ et 0 se termine par le même chiffre que 0.
1 car $1 \times 1 = 1$ et 1 se termine par le même chiffre que 1.
5 car $5 \times 5 = 25$ et 25 se termine par le même chiffre que 5.
6 car $6 \times 6 = 36$ et 36 se termine par le même chiffre que 6.

***Comment avons-nous fait pour les trouver ?***

a) Pour le brenom commençant par 0 : nous avons cherché quel chiffre pouvait convenir après 0.

$$\begin{array}{r}
\dots\ a\ 0 \\
\underline{\dots\ a\ 0}\times \\
\dots\ 0\ 0 \\
\dots\ (a^2)\ 0\ \ \\
\underline{\dots\dots\dots\dots} \\
\dots\ (a^2)\ 0\ 0
\end{array}$$

**[2]**

Les brenoms … a0 et … $a^2$00 sont égaux, donc se terminent par les mêmes chiffres, a doit donc être égal à 0.

Ensuite, nous avons cherché quel chiffre pouvait convenir après 0 0.

$$\begin{array}{r}
\dots\ b\ 0\ 0 \\
\underline{\dots\ b\ 0\ 0}\times \\
\dots\ 0\ 0\ 0 \\
\dots\ 0\ 0\ 0\ \ \\
\dots(b^2)\ 0\ 0\ \ \ \ \\
\underline{\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots(b^2)\ 0\ 0\ 0\ 0
\end{array}$$

Les brenoms … b 0 0 et … $b^2$ 0 0 0 0 sont égaux, donc se terminent par les mêmes chiffres, b doit donc être égal à 0.

De même, tous les chiffres suivants seront des 0, donc le brenom égal à son carré et commençant par 0 est ...000.

b) Pour le brenom commençant à droite par 1 nous avons cherché quel chiffre a pourrait convenir après 1.

$$\begin{array}{r}
\dots\ a\ 1 \\
\underline{\dots\ a\ 1}\times \\
\dots\quad a\ 1 \\
\dots\ (a^2)\ \ a\ \ \ \\
\underline{\dots\dots\dots\dots} \\
\dots\ (a^{2+})(2a)\ 1
\end{array}$$

Les brenoms … a 1 et … (2a) 1 sont égaux, donc 2a doit se terminer comme a, ce qui implique : a = 0.

De même, le chiffre suivant, b, doit se terminer comme 2b, ce qui implique b = 0. On procède de même pour les chiffres suivants. Ainsi à chaque fois on obtient un 0 de plus et le brenom égal à son carré et commençant par 1 est ...001. **[3]**

c) Pour le brenom commençant à droite par 5, nous avons cherché quel chiffre a pourrait convenir après 5.

$$\begin{array}{r}
\dots\ a\ 5 \\
\underline{\dots\ a\ 5}\times \\
\dots\ (5a+2)5 \\
\dots\ (a^2+)\quad 5a\ \ 0 \\
\underline{\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots\ (a^{2+})(10a+2)5
\end{array}$$

Pour que ces brenoms soient égaux, 10 a + 2 doit se terminer par a. Or 10 a se termine par 0 donc 10 a + 2 se termine par 2. Ceci implique : a = 2. Nous remarquons que 2 est le chiffre qui vient après 5 dans 25, carré de 5. Pour trouver le chiffre suivant, b, nous avons fait des multiplications par paquets, en tenant compte du fait que b est le chiffre des centaines :

Nous pouvons donc poser la multiplication :

$$\begin{array}{r}
\ldots\ b\ 25 \\
\underline{\ldots\ b\ 25} \times \\
\ldots \quad 6\ 25 \\
\ldots\ (5b)0\ 00 \\
\ldots(b^2)\ \ 0\ \ 0\ 00 \\
\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\ldots(b^{2+})(5b)\ 6\ 25
\end{array}$$

Nous devons donc choisir b = 6 pour que ces brenoms soient égaux. En continuant de même, nous avons constaté la règle suivante :

**Règle pour trouver le n-ième chiffre du brenom** : on calcule le carré du brenom à n-1 chiffres [NDLR : c'est-à-dire le carré du *nombre*, formé avec les n-1 chiffres déjà obtenus.] ; le $n^{ième}$ chiffre du résultat est alors le chiffre cherché.

Un programme en Pascal nous a alors permis d'obtenir le brenom cherché. (voir annexe 1).

d) Nous avons travaillé de même pour trouver le brenom commençant à droite par 6. Nous avons obtenu la règle suivante :

**Règle pour trouver le n-ième chiffre du brenom** : on calcule le carré du brenom à n-1 chiffres [NDLR : c'est-à-dire le carré du *nombre*, formé avec les n-1 chiffres déjà obtenus.] ; on prend le complément à 10 du $n^{ième}$ chiffre obtenu, c'est le chiffre cherché.

Un programme Pascal nous a alors permis de trouver le brenom cherché. (voir annexe 2).

**Conclusion 1** [Sous réserve que les règles précédentes soient complètement démontrées.]
Il n'existe pas plus de 4 brenoms qui ne changent pas quand on les multiplie par eux-mêmes : il s'agit des brenoms 0, 1 et de ceux obtenus par les règles.

**Conclusion 2** [Après avoir vérifié que les brenoms 0, 1 et ceux obtenus par les règles sont effectivement égaux à leurs carrés.]
Il existe 4 brenoms tels que $x^2 = x$.

[Les propriétés énoncées dans les conclusions 1 et 2 garantissent que le théorème énoncé plus haut est correct.]

**Notes des Editeurs**

**[1]** Dans le texte original, on ne trouve pas trace du fait qu'une multiplication de brenoms nécessite une infinité d'additions. Nous avons systématiquement ajouté une ligne de points (...) aux diagrammes de multiplication.

**[2]** La notation $(a^2)$ signifie que l'on ne retient de $a^2$ que le dernier chiffre. De manière plus générale, la notation (expression+) dans le diagramme d'une opération sur des brenoms signifie que l'on effectue d'abord le calcul de l'expression, que l'on ajoute ensuite à ce résultat l'éventuelle retenue qui peut exister du fait des calculs des chiffres précédents, et enfin, que l'on retient le chiffre des unités. Ce procédé de notation a été mis en place lors d'une discussion entre le chercheur et les élèves.

**[3]** Le raisonnement fait ici prouve seulement que s'il existe un brenom commençant par 1 et égal à son carré, ce ne peut être que …0001 = 1. Il conviendrait de vérifier que le brenom 1 est bien égal à son carré. Le même type de remarque vaut pour d'autres résultats de l'article. Les enseignants et le chercheur n'ont pas estimé utile, à ce niveau-là de discuter avec les élèves de ce problème de démonstration.

### *Annexe 1*
### *Brenom se terminant par 5 et vérifiant $x^2 = x$.*

25
625
625
390625
0625
390625
90625
821890625
890625
793212890625
2890625
8355712890625
12890625
166168212890625
212890625
45322418212890625
8212890625
6745157241821289062 5
18212890625
331709384918212890625
918212890625
8431149125099182128906 25
9918212890625
983709469437599182128906 25
59918212890625
3590192236006259918212890625
259918212890625
675574773922562599182128906 25
6259918212890625
391865760320797562599182128906 25
56259918212890625
316517839732114225625991821289062 5
256259918212890625
656691456824773922562599182128906 25
2256259918212890625
50907088185340398922562599182128906 25
92256259918212890625
85112174940968543523922562599182128906 25
392256259918212890625
153864973445024588727392256259918212890625
7392256259918212890625
546454526123000050574773922562599182128906 25
77392256259918212890625
59895613290008498097449773922562599182128906 25
977392256259918212890625
95529562259685363301286997739225625991821289062 5
9977392256259918212890625
9954835623527538146504411997739225625991821289062 5
19977392256259918212890625
399096201360473745722856619977392256259918212890625
619977392256259918212890625
38437196690887237560119160661997739225625991821289062 5
6619977392256259918212890625
438241006739839913941558791066199773922562599182128906 25
06619977392256259918212890625
438241006739839913941558791066199773922562599182128906 25
106619977392256259918212890625
11367819579125235975036734004106619977392256259918212890625
4106619977392256259918212890625
168643276387171753153207398590041066199773922562599182128906 25
…04106619977392256259918212890625

### *Annexe 2*
### *Brenom se terminant par 6 et vérifiant $x^2 = x$.*

76
5776
376
141376
9376
87909376
09376
87909376
109376
11963109376
7109376
50543227109376
87109376
7588043387109376
787109376
619541169787109376
1787109376
3193759921787109376
81787109376
6689131260081787109376
081787109376
6689131260081787109376
0081787109376
6689131260081787109376
40081787109376
1606549657881340081787109376
740081787109376
547721051611007740081787109376
3740081787109376
13988211774267263740081787109376
43740081787109376
1913194754743017343740081787109376
743740081787109376
553149309256696143743740081787109376
7743740081787109376
59965510454276227407743740081787109376
07743740081787109376
59965510454276227407743740081787109376
607743740081787109376
369352453608598807478607743740081787109376
2607743740081787109376
6800327413935747244982607743740081787109376
22607743740081787109376
511110077017207231620022607743740081787109376
022607743740081787109376
511110077017207231620022607743740081787109376
0022607743740081787109376
511110077017207231620022607743740081787109376
80022607743740081787109376
6403617750108490103144731780022607743740081787109376
380022607743740081787109376
144417182396352539175410357380022607743740081787109376
3380022607743740081787109376
11424552828858793029898066613380022607743740081787109376
93380022607743740081787109376
8719828622222732007751577754293380022607743740081787109376
893380022607743740081787109376
798127864794612716138610952755893380022607743740081787109376
5893380022607743740081787109376
34731928090872050116956482046515893380022607743740081787109376
…95893380022607743740081787109376

[NDLC : dans chaque colonne, on trouve sur une ligne le brenom, sur la ligne suivante, son carré, sur la ligne suivante, le brenom calculé avec un chiffre de plus, sur la ligne suivante, son carré, sur la ligne suivante, etc …]

L’activité de l’un des collèges fut guidée par des fiches de travail. En voici quelques unes :

## Fiche n°1

Calcule :

$$\begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ +\ \ldots\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ -\ \ldots\ 6\ 3\ 4\ 1 \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ \times\ \ldots\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \ldots \end{array}$$

Complète

$$\begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ +\ \ldots \\ \hline \ldots\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ \times\ \ldots \\ \hline \ldots\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Calcule :

$$\begin{array}{r} \ldots\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \times\ \ldots\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ \times\ \ldots\ 5\ 4\ 3\ 2 \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 0\ 6\ 2\ 5 \\ \times\ \ldots\ 0\ 6\ 2\ 5 \\ \hline \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ldots\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \times\ \ldots\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \hline \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots\ 1\ 3\ 5\ 7 \\ \times\ \ldots\ 1\ 3\ 5\ 7 \\ \hline \ldots \end{array}$$

Bon courage !

Commentaires de l’enseignant sur la fiche n°1 (17 novembre 1992) :

Les élèves ont vite glissé sur les additions et soustractions pour s’attaquer au problème $x \times x = x$. Ils ont ignoré les solutions 0 et 1 et ont vite cherché un brenom commençant par 5, d’abord avec la calculatrice ; puis je leur ai appris à multiplier par paquet et ainsi il ont trouvé que :

$$\begin{array}{r} \ldots\ 8\ 2\ 1\ 2\ 8\ 9\ 0\ 6\ 2\ 5 \\ \times\ \ldots\ 8\ 2\ 1\ 2\ 8\ 9\ 0\ 6\ 2\ 5 \\ \hline \ldots\ 8\ 2\ 1\ 2\ 8\ 9\ 0\ 6\ 2\ 5 \end{array}$$

Au cours de cette recherche, faite d’abord au hasard, l’un deux a eu l’idée que pour trouver le chiffre précédent il suffisait de prendre le chiffre précédent dans le produit des nombres. Exemple : $625^2 = 39\underline{\mathbf{0}}625$. Donc 0 sera le chiffre précédent.
Actuellement un élève espère que la solution est périodique à 10 chiffres et calcule

$$\mathbf{(82128906258212890625)^2}.$$

Parallèlement, un autre élève a exploré le brenom [solution possible de $x \times x = x$] commençant par 6 et a déjà trouvé 8 chiffres. Ils sont en train de rédiger des affiches. Sur mon invitation, ils ont (un peu) exploré la somme de 2 brenoms périodiques (période à n chiffres + période à p chiffres).

## Fiche n°2

LES BRENOMS piste A

Livis a trouvé un “truc” pour connaître les chiffres de x tel que $x \times x = x$ avec x commençant par 5.
1- Décrivez précisément ce “truc”.

2- Calculer “à la main” la multiplication ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl} & & 3\ 5 \\ & & \times\ 3\ 5 \\ \hline 5 \times 5 & = & \\ 30 \times 5 & = & \\ 5 \times 30 & = & \\ 30 \times 30 & = & \\ \hline \end{array}$$

Puis calculez, sur le même modèle, $15^2$, $25^2$, $45^2$, …, $95^2$. Pouvez-vous expliquer pourquoi tous ces produits se terminent forcément par 25 ?

3- Sur le même modèle calculer $725 \times 725$ en sachant que $725 = 700 + 20 + 5$. Calculer de même $125^2$, $225^2$, $325^2$, …, $925^2$ et expliquer pourquoi tous ces produit se terminent toujours par 625.

LES BRENOMS piste B

Vous avez trouvé de nombreux chiffres d’un brenom y commençant par 6 et tel que $y \times y = y$.
En revenant en arrière, et, peut-être en s’inspirant de la piste A, essayez de trouver le truc qui permet de trouver les chiffres de y, 1 par 1.

# les brenoms en questions

Quelques sujets de réflexion, présentés par Pierre Duchet, à partir de textes de synthèse écrits par les collégien(ne)s au cours de leur recherche. Ces questions peuvent servir de point de départ pour des activités de recherche intéressantes permettant des apprentissages numériques, logiques et algébriques importants (abordables dès la $6^{ème}$, utiles en terminale et au delà).

***Quelles divisions sont possibles chez les brenoms ?***

La division de brenoms se fait comme la multiplication à trous. Ainsi

… 0 0 0 7 | … 0 0 0 3

revient à faire

… 0 0 0 3
× ?
… 0 0 0 7

Certaines divisions sont impossibles, ainsi lorsque que le dividende est impair et le diviseur pair. Exemple …17 : …4 = ?.

*Démonstration :*
tous les multiples de 4 se terminent par un chiffre pair, donc il est impossible de trouver un brenom x tel que …4 × x = …17.

***Un curieux phénomène ?***

Nous avons remarqué que

… 0 0 7
…7 1 4 2 8 6 ×
… 4 2
… 5 6
… 1 4
… 2 8
… 0 7
… 9
………………
… 0 0 0 0 2 =

Donc … 0 0 2 : … 0 0 7 = … 7 1 4 2 8 6.
Si nous faisons à la calculatrice 2 : 7, nous obtenons 0,28571428, un nombre dont les décimales ont pour période 285714. Or :

… 2 8 5 7 1 4
…7 1 4 2 8 6 +
… 0 0 0 0 0 0 =

Nous avons constaté cela sur plusieurs autres résultats de division, mais nous ne savons pas l'expliquer.

***1 a t-il plusieurs racines carrées ?***

Nous cherchons les brenoms x tels que x × x = 1, autrement dit les brenoms dont le carré est 1, les "racines carrées de 1" en quelque sorte (nous écrivons 1 pour simplifier l'écriture de … 0 0 0 1).
[NDLR : Une écriture du type x × x = 1 est une *équation* et amène la question : puis-je remplacer x par quelque chose de mieux connu pour que l'équation soit juste ? Ces objets mieux connus, s'il existent sont appelés les solutions de l'équation. *Résoudre* une équation, c'est parvenir à connaître toutes les solutions d'une équation. Notre problème ici est de résoudre l'équation x × x = 1 chez les brenoms.]

Bien évidemment, il y a la solution

… 0 0 0 1 × … 0 0 0 1 = … 0 0 0 1 = 1

Y en a-t-il d'autres ? Si nous ne regardons que les premiers (de droite à gauche) chiffres pour faire une table de multiplication de … a × … a, nous voyons que 1 et 9 sont les seuls premiers chiffres possibles d'un brenom dont le carré est 1.

Essayons avec 9 :

cherchons le $2^{ème}$ chiffre possible d'un brenom x commençant (à droite) par 9 et tel que x × x = 1. En regardant les deux premiers chiffres des multiplications possibles, on s'aperçoit que le $2^{ème}$ chiffre ne peut être que 4 ou 9.

*Première piste* : le brenom périodique … 9 9 9 semble être une solution. Nous avons prouvé que les 10 premiers chiffres de la multiplication … 9 9 9 × … 9 9 9 étaient bien 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1. Nous n'avons pas encore réussi à prouver que les chiffres suivants sont toujours des 0.

<u>Conjecture 1</u> *:* … 9 9 9 9 × … 9 9 9 9 = 1.

[NDLR : Une *conjecture* est une propriété que l'on pense vraie, mais que l'on n'est pas parvenu à démontrer : on ne peut donc être certain que c'est vrai.]

*Deuxième piste :* poursuivons la recherche d'une solution du type … 4 9 . Appelons c le troisième chiffre et effectuons la multiplication (les retenues sont comptabilisées, mais seul le premier chiffre, à droite, des nombres calculés nous intéresse : nous avons écrit entre parenthèses le résultat des calculs pour dire que ne n'en retenons que le premier chiffre) :

```
        … c 4 5
        … c 4 5 ×
    …(9c+4) 4 1
     ……  9 6
     …  (9c)
   ……
   …(18c+14) 0 1 =
```

Donc le nombre 18 c + 14 doit se terminer par 0. Or 18 c + 14 se termine par le même chiffre que 18 c + 4, et 18 c + 4 se termine par le même chiffre que 8 c + 4. Si le nombre 8 c + 4 se termine par 0, alors 8 c se termine par 6. Il y a deux solutions 8 × 2 = 16 et 8 × 7 = 56 donc deux brenoms possibles … 2 4 9 ou … 7 4 9.

Premier essai :

c = 7. Appelons d le chiffre suivant (c'est le 4ème). En calculant comme précédemment le 4ème chiffre de

… d 7 4 5 × … d 7 4 5,

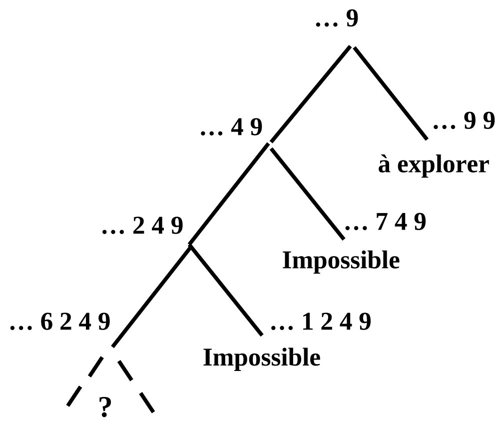
on trouve que c'est le dernier chiffre de 18 d + 24, donc de 18 d + 4, donc de 8 d + 4. Si 8 d + 4 se termine par 0 alors 8 d se termine par 9. C'est impossible : on voit qu'il n'y a aucune solution à notre équation qui commence par … 7 4 9.

Deuxième essai :

c = 2. En procédant comme ci-dessus, on trouve que 8 d doit se terminer par 8. Il y a deux brenoms possibles …6 2 4 9 ou …1 2 4 9.

*Conclusion :*

nous avons poursuivi nos explorations pour le 5ème, pour le 6ème chiffre, … A chaque fois, il y a 2 valeurs possibles pour le chiffre cherché ce qui conduit à deux essais pour le chiffre suivant, deux branches d'exploration. L'une des branches meurt : il n'y a aucune possibilité pour le chiffre suivant. L'autre branche se poursuit pour donner naissance à deux autres branches, dont l'une, à son tour, va mourir, etc … Il semble donc finalement qu'il y ait un brenom (et un seul) qui soit solution de notre équation x × x = 1, qui commence par 9 et qui soit différent de …999, mais nous ne savons pas encore trouver tous ses chiffres.




<u>Conjecture 2</u> *:* Il y a un brenom et un seul qui commence par 9 qui est différent de …999 et dont le carré est 1.

Il reste aussi bien sûr à explorer la question de l'existence d'une solution commençant par 1 et différente de … 0 0 0 1.

# racine carrée

Existe-t-il un brenom qui, multiplié par lui-même, donne …0001 ?

notes rédigés par Anne Mauvoisin, 6ème 3, collège Nézant de Saint Brice sous Forêt [durant l'activité de recherche]

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 1\;5\;7\;8\;1\;2\;4\;9 \\ \times\; 1\;5\;7\;8\;1\;2\;4\;9 \\ \hline 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1 \end{array}$$

[NDLR : malgré la disposition opératoire, seul le résultat de la multiplication est donné ici ; que signifie “poursuivre cette multiplication” ? il s'agit de poursuivre l'écriture du brenom vers la gauche.]

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 2\;5\;1 \\ \times\; 2\;5\;1 \\ \hline 0\;0\;1 \end{array}$$

Il est impossible de poursuivre cette multiplication :

$$\begin{array}{r} 4\;9\;9 \\ \times\; 4\;9\;9 \\ \hline 0\;0\;1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots\;0\;0\;0\;1 \\ \times\; \dots\;0\;0\;0\;1 \\ \hline \dots\;0\;0\;0\;1 \end{array}$$

1 et une infinité de zéros donnent bien …00001 comme résultat.

$$\begin{array}{r} \dots\;9\;9\;9\;9\;9 \\ \times\; \dots\;9\;9\;9\;9\;9 \\ \hline \dots\;0\;0\;0\;0\;1 \end{array}$$

On trouvera toujours …00001 avec une infinité de zéros.

Si on rajoute un 9, il y aura un 0 de plus au résultat ; [voilà] pourquoi :

avec multiplications par paquets

$$\begin{array}{rl} \dots\;9\;|\;9\;9\;9 & \\ \times\quad \dots\;9\;|\;9\;9\;9 & \\ \hline \dots\;9\;9\;8\;0\;0\;1 & \rightarrow \text{résultat de } 999 \times 999 \\ \dots\;8\;9\;9\;1\;0\;0\;0 & \rule{0pt}{0pt} \\ \dots\;8\;9\;9\;1\;0\;0\;0 & \Big\}\ \text{résultat} \times 999 \text{ se termine par trois 0 et 1} \\ \dots\;8\;1\;0\;0\;0\;0\;0\;0 & \\ \hline \dots\;8\;0\;0\;0\;1 & \rightarrow \text{résultat de } 9000 \times 9000 \end{array}$$

On retrouvera toujours le résultat précédent, ici 998001. Il y aura donc toujours un 8. Le résultat de 9000 × 999 se termine par trois 0 et 1. Il se trouve là deux fois. 8

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{1} \\ 10 \end{array}$$

[NDLC : c'est une note ? sur 10 !]