Existe-t-il un autre brenom que …0002 qui soit √…0004 ?

par Anne Spinosi, Mari Kohiyama, Romain Slitine, lycées Racine de Paris

enseignante : Anne Reinmann

chercheur : Pierre Duchet, CNRS

les brenoms

Eh oui, c'est du verlan ! Un brenom est une suite de chiffres illimitée. On écrit un brenom (si je ne m'abuse !) de droite à gauche. Un exemple :

…	6	5	3	7	1
ci-gît une infinité de chiffres !				dizaine(s)	unité(s)

[← lire dans ce sens]

Les calculs chez les brenoms se font de la même manière qu'avec leurs cousins les nombres parce qu'ils s'effectuent de droite à gauche, ils ont ainsi les mêmes qualités de commutativité, d'associativité et d'additivité. Cependant la division pose problème.

On remarque qu'un calcul avec des nombres entiers peut se traduire sous forme de brenoms :

$$\begin{tikzcd}
\text{entier a} \arrow[r] \arrow[d, "\text{opération}"] & \text{brenom} \arrow[d, "\text{opération}"] \\
\text{entiers} \arrow[r] & \text{brenoms}
\end{tikzcd}$$

On peut également l'écrire sous cette forme :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & f(a) \arrow[d, "g"] \\
g(a) \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

$b = f \circ g\ (a) = g \circ f\ (a)$

exemple de calculs avec les brenoms :

l'addition :

$$\begin{array}{cccccc}
 & \bullet & \bullet & \bullet & 6 & 4 & 2 \\
+ & \bullet & \bullet & \bullet & 2 & 1 & 3 \\
\hline
 & \bullet & \bullet & \bullet & 8 & 5 & 5
\end{array}$$

la multiplication :

			•	•	•	6	4	2
		×	•	•	•	2	1	3
		•	•	•	1	9	2	6
		•	•	•	6	4	2	0
•	•	•	1	2	8	4	0	0
			1	3	6	7	4	6

exemples de chiffres inconnus

Cependant nous avons dû constater que le résultat d'une multiplication n'est pas à 100 % sûr puisque l'infinité de chiffres inconnus des facteurs entraîne une infinité de chiffres inconnus dans le résultat.

Mais après de longues et laborieuses recherches nous avons découvert ce petit

théorème :

Si on multiplie deux brenoms a et b dont on connaît les deux premiers chiffres alors on connaît les deux premiers chiffres du résultat de $a \times b$.

démonstration :

Soit $a = x_a \times 10^2 + (a_2 \times 10 + a_1)$,

où x_a est un brenom, a_2 est le chiffre des dizaines du brenom, a_1 est le chiffre des unités du brenom,

et $b = x_b \times 10^2 + (b_2 \times 10 + b_1)$

Alors on a :

$$a \times b = [x_a \times 10^2 + (a_2 \times 10 + a_1)]\,[x_b \times 10^2 + (b_2 \times 10 + b_1)]$$

$$\begin{aligned} a \times b = {} & 10^4(x_a \times x_b) \\ & + 10^3(x_a \times b_2 + a_2 \times x_b) \\ & + 10^2(x_a \times b_1 + a_2 \times b_2 + a_1 \times x_b) \\ & + (a_2 \times b_1 \times 10) + (a_1 \times b_2 \times 10) \\ & + (a_1 b_1) \end{aligned}$$

On peut donc être "sûr" du chiffre des dizaines et du chiffre des unités du brenom $a \times b$.

Nous nous sommes — comme il en est coutume en maths — posé un problème !, que nous avons (en toute modestie) analysé avec brio !

Existe-t-il d'autre(s) brenom(s) que …0002 qui soit √…0004 ?

Ce qui revient à chercher les brenoms x tels que $x^2 = \ldots 0004$.
↑ infinité de zéros

Nous avons commencé par chercher le premier chiffre de ces brenoms et nous avons trouvé que 8 et 2 convenaient ; nous avons ensuite recherché les deux premiers chiffres de ces brenoms se terminant par 8 et après de multiples efforts nous avons découvert que $(\ldots 48)^2$ et $(\ldots 98)^2 = \ldots 0004$.

recherche des trois premiers chiffres :

$(\ldots 198)^2 = \ldots 204$
$(\ldots 298)^2 = \ldots 804$
$(\ldots 398)^2 = \ldots 404$
$\mathbf{(\ldots 498)^2 = \ldots 004}$
$(\ldots 598)^2 = \ldots 604$
$(\ldots 798)^2 = \ldots 804$
$(\ldots 898)^2 = \ldots 404$
$\mathbf{(\ldots 998)^2 = \ldots 004}$

recherche des quatre premiers chiffres :

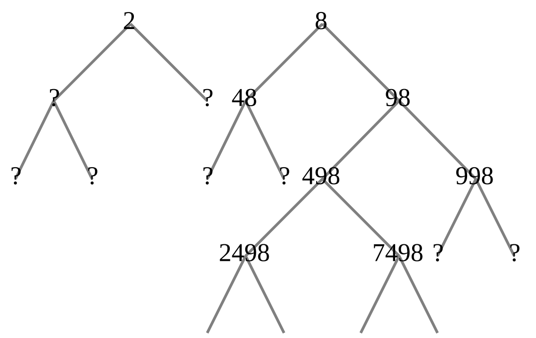
$\mathbf{(\ldots 2498)^2 = \ldots 0004}$
$\mathbf{(\ldots 7498)^2 = \ldots 0004}$

recherche des cinq premiers chiffres :

$\mathbf{(\ldots 37498)^2 = \ldots 00004}$
$\mathbf{(\ldots 87498)^2 = \ldots 00004}$

De ces suites de chiffres … (interminables j'en conviens !) nous avons décelé deux choses intéressantes :

d'une part un arbre (le *chiffrier* pour les intimes !). [NDLC : *d'autre part ?*]



De ce chiffrier nous récoltons l'observation suivante : (pour k entier, $k \geq 1$:)

Si un brenom se terminant par $(a \times 10^k + b)$ a un carré qui se termine par (00…4), alors
↑ k zéros
le brenom se terminant par $((a+5)\times 10^k + b)$ aura lui aussi un carré se terminant par (00…4).
↑ k zéros

A chacun son tour de se creuser la tête ! Nous venons de vous donner un bon tuyau avec le chiffrier dont vous pourriez par exemple prolonger les branches grâce à un programme ordinateur pour obtenir la solution, fruit de si ardentes recherches !

Mais pour les rapides qui trouveraient trop tôt la solution, nous avons concocté d'autres petits problèmes :

Vous pouvez par exemple essayer de découvrir les différents brenoms x dont le carré peut être égal à $x^2 = \underline{0}1$. Si oui, en existe-t-il plusieurs ?

ou encore :

existe-t-il un brenom x qui, élevé au carré, est égal à $x^2 = -1$?

Bonne chance

et à « tôt bien ! »