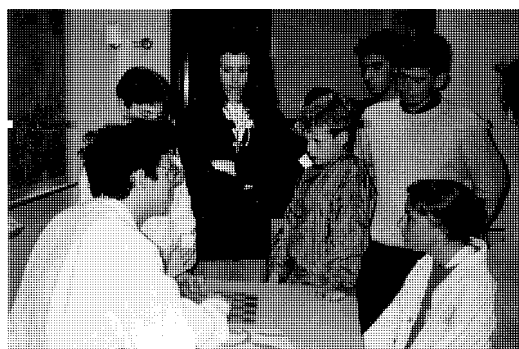


Gagner au Jeu de Nim

par Daniel Elliott Loeb, Association Université Mathématique d'été, LABRI (URA CNRS 1304), Université de Bordeaux I, 33405 Talence, France

Extrait de l'Université Mathématique d'Été 1991 (ENSAE, Toulouse) et du Hampshire College Summer Studies in Mathematics 1993 (USA)



[NDLC : comme le savent tous les participants du congrès, Daniel E. Loeb est américain, et certaines tournures de son français sont typiquement américaines ; il faut penser à ajouter l'accent, en particulier pour son désormais célèbre ... *cochonne jaune* ; voir page suivante la définition de la loi %]

Règles de Nim

Le jeu de Nim se joue à deux. Des allumettes sont réparties en plusieurs piles. Les joueurs enlèvent à tour de rôle de une à toutes les allumettes d'une pile. Quand un joueur est dans l'impossibilité de jouer, puisque il n'y a plus d'allumettes, il perd. Le joueur ayant enlevé la dernière allumette gagne.

exercice : Jouez un peu avec un ami. Vous soupçonneriez vite certaines règles qui forment la base de la stratégie du jeu.

— Quand il n'y a plus qu'une pile, prenez-la pour gagner.

— Quand il n'y a que deux piles, égalisez les. Votre adversaire sera obligé de les inégaliser, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des deux piles, et votre victoire.

— Par contre, quand il n'y a que trois piles inégales, évitez de les rendre égales.

exercice : Jouez à Nim. Formulez d'autres stratégies.

Définition du "Gagnant"

On veut démontrer que certaines positions sont gagnantes, et d'autres perdantes. Mais pour faire cela de façon rigoureuse, il va falloir une définition rigoureuse de "gagnante" et "perdante".

Soit P une position dans un jeu J . P conduit aux choix de plusieurs positions P_1, P_2, \dots, P_n . On dit que P est *gagnante* (pour le joueur dont c'est le tour) s'il y a au moins un choix P_i perdant. Un "coup gagnant" est donc le choix d'une position perdante pour l'adversaire. Par contre, P est *perdante* si tous les choix P_i sont gagnants puisque il n'y a pas de "coup gagnant" possible.

Cette définition est-elle circulaire ? En effet, "gagnante" est définie en fonction de "perdante" et *vice-versa* ! Heureusement, ce n'est pas le cas, car les jeux P_i sont plus courts que P . Formellement, nous avons la démonstration suivante.

Théorème.

Toutes les positions sont soit gagnantes soit perdantes, mais pas les deux.

Démonstration : Soit P le jeu le plus court tel que la définition (perdante, gagnante) ne marche pas.

Cas 1. P est terminé. Il n'y a plus de choix. Donc, tous les choix sont gagnants. Donc, P est bien perdant, pas gagnant.

Cas 2. Il reste m coups à jouer ($m > 0$). Tous les P_i ont au plus $m - 1$ coups à jouer. Par hypothèse, ils sont gagnants ou perdants mais pas les deux. Donc, P est gagnant ou perdant mais pas les deux. ϵ

exercice : Que signifie "gagnant" et "perdant" dans un jeu "infini" ? Dans un jeu à trois joueurs ?

Nim-Somme

On passe ensuite à Nim à trois piles d'allumettes. On remarque que la plupart des positions sont gagnantes. On va donc apprendre les positions perdantes, et essayer de les "refiler" à l'adversaire. On note par xyz , la position ayant une pile d' x allumettes, une pile d' y allumettes, et une pile de z allumettes.

Par définition, 000 (plus d'allumettes) est perdante, et nous avons déjà vu que 0xx (deux piles égales) est perdante pour tout x . 123 est perdante puisque tous les choix sont gagnants pour notre adversaire.

Si on fait ...	Notre adversaire fera ...
023,	022.
113,	110.
103,	101.
122,	022.
121,	101.
120,	110.

exercice : Démontrez que les positions 123, 145, 167, et 246 sont perdantes. Quelles autres positions sont perdantes ?

exercice : Est-il possible que xyz et xyt soient perdantes ? ($z \neq t$).

En fait, non. Supposons que $z > t$. Alors, xyt est une option perdante à partir de xyz . Elles ne peuvent pas être perdantes toutes les deux.

Cette propriété nous permet de définir la loi suivante : $x \% y = z$ le nombre unique tel que xyz perde, ou $x \% y =$ cochon jaune s'il n'existe pas de tel z .

Cette définition a l'air bizarre, mais on peut déjà commencer à remplir la table des valeurs de $x \% y$ en utilisant les positions perdantes que l'on connaît déjà.

$x \% y$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6		4	
3	3	2	1	0				
4	4	5	6		0	1	2	
5	5	4			1	0		
6	6	7	4		2		0	1
7	7	6					1	0

Le fait que 123 soit perdante nous permet d'écrire $1 \% 2 = 3$, $1 \% 3 = 2$, $2 \% 3 = 1$, $2 \% 1 = 3$, $3 \% 1 = 2$, $3 \% 2 = 1$. Donc, chaque position perdante que l'on trouve nous permet d'entrer jusqu'à 6 nombres dans la table. Cette table contiendra tout ce qui est nécessaire pour bien jouer à Nim à trois piles.

exercice : Remplissez le reste de la table. Avez-vous été amené à utiliser le cochon jaune ?

La Règle "Mex"

La table de $x \% y$ est très utile pour pouvoir gagner à Nim. Mais il est difficile de la remplir surtout quand on commence à mélanger "gagner" et "perdre".

La règle suivante nous donne un moyen de calculer $x \% y$ dans la table à partir des valeurs antérieures.

Théorème. $x \% y$ prend la valeur du plus petit nombre qui n'est ni dans la colonne au dessus ni dans la rangée à gauche de $x \% y$. Donc, $x \% y$ n'est jamais un cochon jaune.

Exemple. $4 \% 6 = 2$ puisque 4, 5, 6, 7, 0, 1 figurent à gauche de $4 \% 6$, et 6, 7, 4, 5 figurent au dessous, 2 étant le nombre le plus petit autre que 0, 1, 4, 5, 6, 7.

$x \% y$								6
								7
								6
								5
								4
4	4	5	6	7	0	1		?

Cette règle s'appelle "Mex" (valeur minimale exclue). En effet, $x \% y$ est le nombre minimal exclu d'un certain ensemble.

Démonstration. Soit z la valeur définie ci-dessus. Il faut démontrer que xyz est perdante. Pour faire cela, il faut démontrer que toutes les positions possibles à partir de xyz sont gagnantes.

A partir de xyz , si on enlève de la première pile, on arrive à une position $x'yz$ avec $x' < x$. Mais, $x' \% y$ se trouve au-dessus de $x \% y$. Donc, $z \neq x' \% y$. Donc, $x'yz$ est une position gagnante.

A partir de xyz , si on enlève de la deuxième pile, on arrive à une position $xy'z$ avec $y' < y$. Mais, $x \% y'$ se trouve à la gauche de $x \% y$. Donc, $z \neq x \% y'$. Donc, $xy'z$ est une position gagnante.

A partir de xyz , si on enlève de la troisième pile, on arrive à une position xyz' avec $z' < z$. Mais z est le plus petit nombre qui n'est ni à la gauche ou ni au-dessus de $x \% y$. Donc, z' se trouve à la gauche de $x \% y$ ou au-dessus. Supposons que z' se trouve à sa gauche. Il existe donc $x' < x$ avec $z' = x' \% y$. Donc $x'yz'$ est perdante. Mais $x'yz'$ est une position possible à partir de xyz' . Donc xyz' est une position perdante. L'autre cas similaire est un exercice. ☹

exercice : Complétez la démonstration.

exercice : La règle "Mex" nous permettra d'élargir la table de $x \% y$. Que trouvez-vous ?

Ou-exclusif

On constate que la table de $x \% y$ se répète. Elle comporte des blocs 2 fois 2. Et des bloc 4 fois 4. Et ainsi de suite. Il sera donc utile de réécrire la table en base deux.

$x \% y$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
0000	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
0001	0001	0000	0011	0010	0101	0100	0111	0110	1001	1000
0010	0010	0011	0000	0001	0110	0111	0100	0101	1010	1011
0011	0011	0010	0001	0000	0111	0110	0101	0100	1011	1010
0100	0100	0101	0110	0111	0000	0001	0010	0011	1100	1101
0101	0101	0100	0111	0110	0001	0000	0011	0010	1101	1100
0110	0110	0111	0100	0101	0010	0011	0000	0001	1110	1111
0111	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000	1111	1110
1000	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	0000	0001
1001	1001	1000	1011	1010	1101	1100	1111	1110	0001	0000

Pour calculer $x \% y$, il a fallu calculer tous les nombres à gauche et au-dessus de $x \% y$ et prendre leur "Mex" (nombre minimal exclu). Nous pouvons maintenant jouer sans faute à Nim à trois piles.

Mais, en regardant la table en binaire, on trouve un nouvelle façon de calculer $x \% y$. $x \% y$ comporte un 0 là où x et y ont le même chiffre, et un 1 où x et y ont des chiffres différents. Les informaticiens désignent par "ou-exclusif" cette façon de combiner x et y ; les mathématiciens la désignent par "Nim-somme." Il s'agit de l'addition binaire sans tenir compte de la retenue.

Exemple. Soit le jeu de Nim à trois piles de tailles 170, 289, et 1993 respectivement. On ne veut pas écrire une grande table de $x \% y$. On veut simplement calculer $170 \% 289$ directement afin de connaître combien d'allumettes il va falloir enlever de la troisième pile. 170 et 289 s'écrivent 10101010 et 100100001 en binaire. Leurs Nim-somme est 110001011 ou bien 395 en décimal. Donc, il faut réduire la troisième pile à 395 allumettes.

exercice : Y a-t-il une Nim-multiplication # "compatible" avec $\%$?

Nim à Plusieurs Piles

Maintenant que le jeu à trois piles est résolu, le jeu à quatre piles ou plus devient très simple. La stratégie générale pour Nim est la suivante.

Théorème. Etant donnée une position dans le jeu de Nim, écrivez la taille des piles en binaire. Les additionnez sans retenue (ou-exclusif). Si le résultat vaut zéro, la position est perdante, sinon, la position est gagnante.

Par exemple, étant données les piles de taille 1, 5, 7, 17, 23, et 34 (en binaire : 000001, 000101, 000111, 010001, 010111, et 100010), leur somme est 100111. Donc, la position est gagnante. En effet, si on réduit la pile de 34 à 5 allumettes, alors la somme deviendra zéro et notre cher adversaire aura une position perdante.

Démonstration : On démontre le théorème par récurrence sur le nombre total d'allumettes.

Si le total vaut zéro, n'importe quel coup le rendra inégal à zéro, c'est-à-dire rendra la position gagnante. Donc, la position de départ était perdante.

Si le total ne vaut pas zéro, alors trouvez une pile qui contribue au bit le plus à gauche du total. Réduisez cette pile pour égaler le total des autres piles. \Leftarrow

Conclusion

Nous sommes sûrs de toujours gagner à Nim (sauf si notre adversaire connaît ce théorème et pour pas de chance nous démarrons dans l'une des rares positions perdantes). Alors, personne ne veut plus jouer avec nous.

Pouvons-nous gagner à d'autres jeux ? Le théorème de Sprague et Grundy nous dit que oui. Soit J un jeu impartial. C'est-à-dire J est un jeu où les deux joueurs peuvent faire les mêmes coups. (Par exemple Nim, mais pas les échecs.)

On peut créer un "dictionnaire" qui traduit chaque position P dans le jeu J en une position $G(P)$ dans le jeu de Nim à une pile.

On peut même calculer $G(P)$. C'est le plus petit nombre qui n'est pas égal à $G(Q)$ ceci pour toute option Q de la position P .

Comme on sait bien jouer à Nim, et que tous les jeux impartiaux sont équivalent à Nim à une pile, on sait bien jouer à tous les jeux impartiaux.

Exercice : Etudiez les jeux suivants ou vous propres jeux impartiaux.

Comment Bien Découper Un Gâteau. Maman a préparé un gâteau rectangulaire n cm fois m cm. Alice et Bill coupent à tour de rôle les morceaux en deux jusqu'à ce qu'il reste nm morceaux de 1 cm fois 1 cm. La dernière personne à couper un morceau mange le gâteau ; l'autre fait la vaisselle.

Dominos. Les joueurs placent à tour de rôle des dominos sur un échiquier. Le dernier joueur à placer un domino gagne.

Jeu de Grundy. On joue avec des piles d'allumettes. Le seul coup possible consiste à diviser une pile en deux parties inégales. Le jeu se termine quand toutes les piles contiennent une ou deux allumettes. Le joueur jouant le dernier gagne. (Question ouverte : $G(n)$ deviendra-t-il éventuellement périodique de période trois ?)

Références :

[1] E. R. BERLEKAMP, J. H. CONWAY AND R. K. GUY, "Winning Ways for your Mathematical Plays," Academic Press, (1982).

[2] J. H. CONWAY, *On Numbers and Games*, Academic Press (1976) Londres & New York.