et si on coloriait un tore ?

par Nicolas Chatel, Lucie Jobert, Vincent Michelon, Amos Waintrater, tous élèves de 2nde des lycées Jean Racine de Paris et Georges Braque d'Argenteuil

enseignants : Pierre Audin, Joëlle Richard, Christine Rouaud

chercheur : Jean-Pierre Bourguignon, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

sujet proposé par Jean-Pierre Bourguignon :

Et si on coloriait un tore !

Le problème du **coloriage des cartes planes** a reçu une publicité considérable il y a quelques années lorsqu'on a enfin pu établir que 4 couleurs suffisaient pour colorier toute carte tracée dans le plan (ou sur la sphère d'ailleurs).

La question se pose dans tous les autres espaces, et tout naturellement sur les surfaces fermées (comme la sphère).

La surface proposée pour démarrer l'étude est **le tore** (ou chambre à air). Il s'agit donc de proposer des cartographies du tore qui nécessitent plus de 4 couleurs pour les colorier sans que deux pays voisins aient la même couleur. L'idéal serait de **cerner le nombre minimum** nécessaire pour colorier n'importe quelle carte.

Il est possible de considérer aussi des surfaces un peu plus complexes, par exemple passer au tore à deux trous, à trois trous, etc. ou à la bouteille de Klein.

Introduction

Notre sujet est le coloriage sur le tore. Il s'agit en fait de trouver le nombre chromatique du tore, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires au coloriage de n'importe quelle carte du tore. Le théorème des quatre couleurs, démontré en 1976, dit que quatre couleurs suffisent pour colorier une carte du plan.

Définitions : cartes, régions, frontières

Une carte est un ensemble de régions séparées par des frontières, une frontière étant une courbe non réduite à un point.

4	1
3	2

Les régions 1 et 2 sont voisines ainsi que les régions 2 et 3, 3 et 4, et 4 et 1. Cependant, les régions 4 et 2 et 1 et 3 ne sont pas voisines, suivant la définition des frontières. Donc il suffit de 2 couleurs pour colorier cette carte.

Le problème des quatre couleurs.

Ce problème se pose ainsi : quel est le nombre minimum de couleurs permettant de colorier n’importe quelle carte sur le plan ?

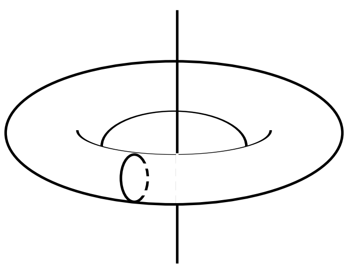
En 1880, M. Kempe a cru démontrer que : “Quel que soit le mode de division d’une carte ou d’un globe, représentant la Terre ou un continent, en états, territoires, districts, départements, il suffit de 4 couleurs pour colorier cette carte, avec cette seule condition que deux districts ayant une limite commune soient recouverts de deux couleurs différentes.” (*Théorie des nombres*, de Edouard Lucas.)

Bien que considérée comme acquise, cette démonstration s’est avérée fausse et il a fallu attendre 1976 pour que, grâce à l’informatique, ce théorème soit révisé et redémontré. L’utilisation d’un Cray a été la source d’une véritable polémique entre les mathématiciens qui considéraient que la démonstration à l’aide d’un ordinateur ne devait pas être prise en compte, et ceux qui s’en contentaient.

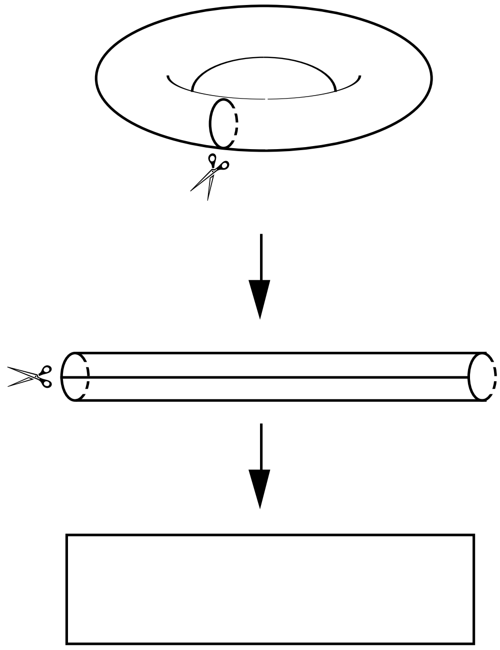
[NDLR : La preuve de 1976 — par Appel, Haken et Koch — a dû attendre 1994 pour être *stabilisée*. Une preuve moins longue, mais nécessitant toujours d'énormes calculs d'ordinateurs, vient d'être mise au point par Robertson et Seymour.]

Qu’est-ce qu’un tore ?

C’est la surface engendrée par la rotation d’un cercle autour d’un axe situé dans son plan et ne le coupant pas.



Pour travailler plus commodément sur le tore, on utilise une représentation plane :



Le tore devient ainsi un rectangle ayant certaines particularités :

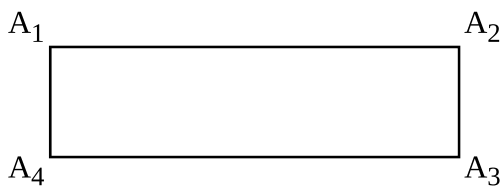
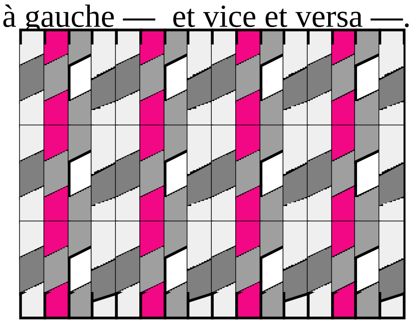


table des identifications :

Tout point de A_1A_2 s’identifie à un point de A_3A_4 par la translation de vecteur A_1A_4 et tout point de A_1A_4 s’identifie à un point de A_2A_3 par la translation de vecteur A_1A_2.

Pour se représenter ces identifications, on peut penser à un jeu vidéo dans lequel un personnage sortant de l’écran par le haut réapparaît en bas — et vice et versa — et dans lequel un personnage sortant par la droite réapparaît à gauche — et vice et versa —.

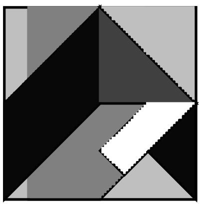


Essais de coloriages.

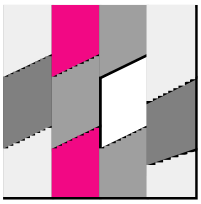
Une fois notre sujet défini, nous nous sommes attaqués à son contenu, à savoir le coloriage sur le tore. Sachant qu'il suffit de 4 couleurs pour colorier n'importe quelle carte du plan, nous avons essayé de voir s'il n'existait pas une carte du tore qui nécessiterait plus de 4 couleurs.

nos résultats

nous avons d'abord trouvé une carte nécessitant 5 couleurs :

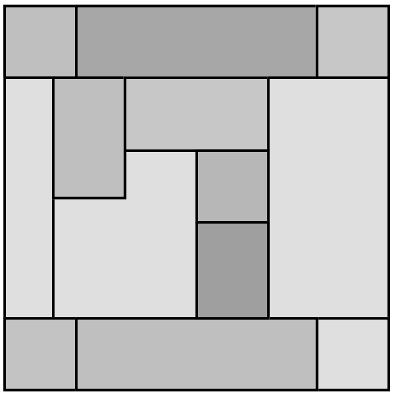


Trouver une carte nécessitant 6 couleurs ne fut pas un problème :



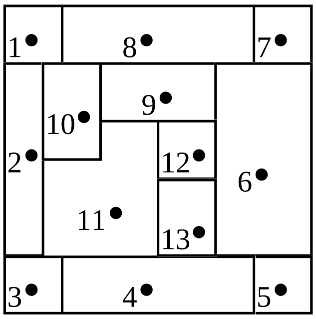
cependant le passage à 7 couleurs nous a causé quelques tracas.

Par exemple cette carte, que nous avions coloriée à l'aide de 13 couleurs, s'est révélée n'en nécessiter que 5 :

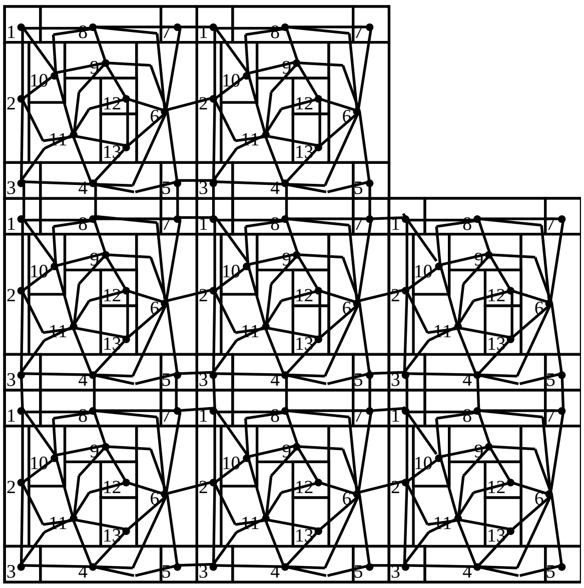


Comment sommes-nous passés de 13 à 5 couleurs ?

C'est à ce moment qu'intervient la méthode du graphe : dans chaque région, nous avons placé un point que l'on appellera "capitale".

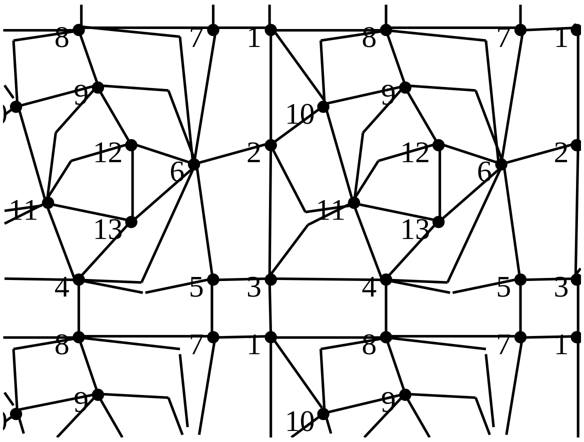


Une capitale est reliée à toutes les autres capitales des régions voisines par des arêtes ou "lignes de chemins de fer". Une ligne de chemin de fer ne quitte un pays que pour aller dans l'autre en passant par leur frontière commune. On obtient donc un ensemble de sommets et d'arêtes qui s'appelle un graphe, dont nous allons colorier les sommets en respectant la règle que deux d'entre eux, reliés par une même arête, ne peuvent avoir la même couleur. Cela donne une formulation équivalente au problème initial.

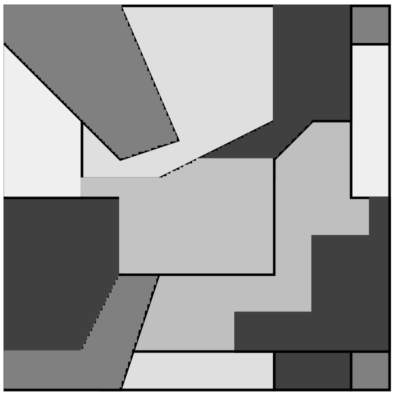


Cette carte pourrait être coloriée avec 13 couleurs. Cependant, on pourrait la colorier avec moins de couleurs …

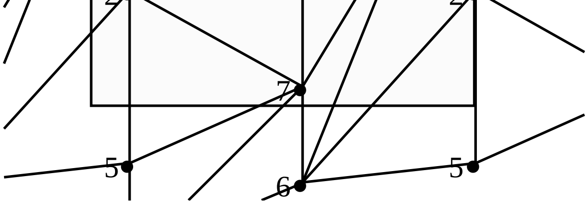
… pourriez-vous colorier cette carte avec seulement 5 couleurs ?



essais de coloriage à 8 couleurs



On obtient à partir du graphe de cette carte à 7 couleurs, un graphe dit “complet”, c'est-à-dire un graphe tel que chaque capitale soit reliée à chacune des six autres, et donc que chaque capitale nécessite une couleur différente des six autres.

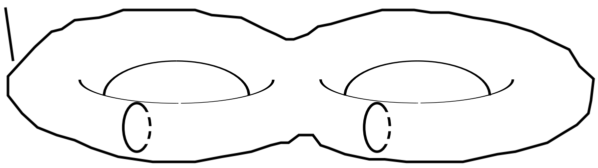


Or, grâce au théorème d'Euler, on a la certitude que 7 est bien le nombre chromatique sur le tore. En effet, d'après ce théorème d'Euler, le nombre de sommets - le nombre d'arêtes + le nombre de faces est caractéristique de la surface. Ce nombre, sur le tore, est égal à 0. (Ici, on a bien 7 - 21 + 14 = 0.)

passage au tore à 2 trous et autres perspectives

Découragés par nos vaines recherches pour trouver une carte nécessitant 8 couleurs, nous avons pensé qu'une ouverture sur le tore à deux trous nous permettrait de créer de nouvelles cartes nécessitant plus de couleurs, et ainsi, d'élargir nos recherches.

Mais le découpage de ce tore à deux trous a suffit à nous poser d'énormes problèmes que nous n'avons pas encore résolus à la date d'aujourd'hui.



Nous aurions voulu trouver une bonne représentation plane de ce tore à deux trous mais malheureusement, l'un des nôtres s'est tué à la tâche [1] et a emporté ses secrets dans la tombe …

A vous de faire mieux …

[1] [NDLR : mais non, ce n'est pas vrai, c'est juste un point d'humour.]