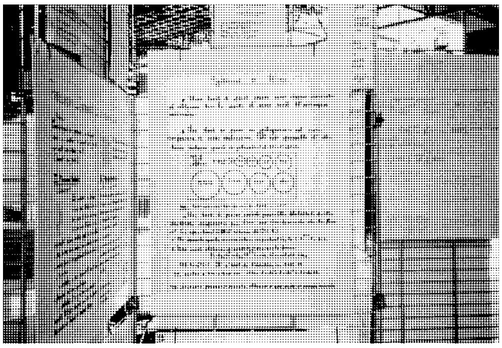
le sac à dos

Par Marine Goutefangea et Gwénolé Popp du lycée Jean Jaurès d'Argenteuil [jumelage entre les lycées Jean Jaurès d'Argenteuil et Paul Eluard de Saint Denis]

enseignants : Joseph Cesaro, Alain Huet, René Veillet

chercheur : Daniel Barsky, Directeur de Recherche au CNRS, Université de Villetaneuse



principe du sac à dos

Un sac à dos doit nous permettre de connaître quels sont les objets qui se trouvent dans le sac connaissant initialement le poids des objets.

exemple d'un sac à dos : un sac à dos généré par une suite quelconque.

On se donne la suite définie par :

$U_1 = 1$ et, quel que soit $n \geq 1$:

$$U_{n+1} = 7.U_n + 3.$$

Les premiers termes de la suite étant :
$U_1 = 1$; $U_2 = 10$; $U_3 = 73$; $U_4 = 3601$; $U_5 = 25201$; $U_6 = 1235314$ …

On cherche a tel que la suite définie par $V_n = U_n + a$ vérifie $V_{n+1} = 7.V_n$

$$\begin{aligned} V_{n+1} = 7.V_n &\Leftrightarrow V_{n+1} = 7.U_n + 7\,a \\ &\Leftrightarrow U_{n+1} + a = 7.U_n + 7\,a \\ &\Leftrightarrow 7.U_n + 3 + a = 7.U_n + 7\,a \\ &\Leftrightarrow 6\,a = .3 \\ &\Leftrightarrow a = 1/2. \end{aligned}$$

Donc la suite V est géométrique de raison 7 et de premier terme $V_1 = 3/2$. La suite V étant géométrique, on a alors :

$$V_n = 3/2.(7)^{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i = V_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i = \frac{3}{2}\frac{1-7^n}{1-7} \leq \frac{3}{2}.\frac{7^n}{6} \leq \frac{7^n}{4}$$

Montrons que la somme des n premiers termes de la suite U est inférieure au $(n+1)^{\text{ème}}$ terme. De la relation $V_n = U_n + 1/2$, on tire :

$$\sum_{i=1}^{i=n} U_i = \sum_{i=1}^{i=n} (V_i - \frac{1}{2}) = \sum_{i=1}^{i=n} V_i - \frac{n}{2} \leq \frac{7^n}{4} - \frac{n}{2}$$

Estimons la différence entre les n premiers termes de la suite U et le (n+1)$^{\text{ème}}$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} U_i - U_{n+1} \leq \frac{7^n}{4} - \frac{n}{2} - \frac{3}{2}.7^n + \frac{1}{2}$$

Or $\frac{7^n}{4} - \frac{n}{2} - \frac{3}{2}.7^n + \frac{1}{2} = \frac{7^n}{4}(1 - 3x2) + \frac{1-n}{2}$

$$= -5\frac{7^n}{4} + \frac{1-n}{2}$$

nombre qui est, pour tout n, négatif et le résultat est démontré.

La suite définie ci-dessus est un sac à dos où les objets peuvent se trouver au moins une fois.

un sac à dos parfait : la boite de poids.

Considérons une boite dans laquelle se trouvent :

(n-1) poids de 1
(n-1) poids de n
(n-1) poids de n^2
(n-1) poids de n^3
…
(n-1) poids de n^k

Somme de tous les poids.

* Avec (n-1) poids de 1 on obtient tous les poids compris entre 0 et (n-1).

* Avec (n-1) poids de n on obtient tous les poids de la forme a.n avec a entier et 0 ≤ a ≤ (n-1).

⇒ la somme de tous les poids de 1 et de n est donc : (n-1) + n(n-1) = n^2 - 1.

On généralise :

* Avec (n-1) poids de n^k on obtient tous les poids de la forme a.n^k avec

a entier et 0 ≤ a ≤ (n-1)

⇒ la somme de tous les poids de 1 à n^k est donc …

$$\sum_{i=0}^{i=k}(n-1)n^i = (n-1)\sum_{i=1}^{i=k} n^i = (n-1)\frac{1-n^{k+1}}{1-n}$$
$$= n^{k+1} - 1$$

et le poids maximal que l'on peut obtenir est n^{k+1} - 1.

Obtention de tous les poids :

Montrons par récurrence que tous les poids compris entre 0 et n^{k+1} - 1sont réalisables.

— 0 : pas de problème.
— soit P un poids obtenu, deux cas se présentent :

— on peut lui rajouter 1 et c'est fini
— on ne peut pas [NDLC : et ce n'est pas fini.] (tous les 1 sont utilisés) dans ce cas on les enlève TOUS et deux cas se présentent :

— on peut ajouter un poids de n et c'est fini (on a retiré un poids de (n – 1) et ajouté un poids de n donc on a ajouté 1).
— on ne peut pas (tous sont utilisés), on les enlève TOUS et deux cas se présentent : [NDLC : quand c'est fini-ni-ni-ni-ni, ça recommence.]

— on peut ajouter un poids de n^2 et c'est fini (on a retiré un poids de (n – 1) + n(n – 1) et rajouté un poids de n^2 donc on a ajouté 1).
— on ne peut pas (tous sont utilisés), on les enlève TOUS et deux cas se présentent :
— …
— …

En conclusion, soit on est arrivé à ajouter 1 avant les poids de n^k, soit tous les poids de n^k sont utilisés et nous sommes au poids maximum.

[NDLC : *moi*, dans *mon* sac à dos, je mets des chips, pas des chiffres, et j'essaie d'enlever des poids plutôt que d'en ajouter …]

Unicité et codage.

Soit P un poids, il peut donc s'écrire sous la forme :

$P = a_k.n^k + a_{k-1}.n^{k-1} + \ldots + a_i.n^i + \ldots + a_1.n + a_0$
avec $0 \leq a_i \leq (n-1)$.
Par division euclidienne de P par n :

* il existe un unique a_0 tel que : $P = a.n + a_0$, d'où l'unicité de a_0.

Par division euclidienne de $(P - a_0)/n$ par n :

* il existe un unique a_0 tel que :

$$(P - a_0)/n = a_2.n + a_1$$

d'où l'unicité de a_1.

Et en réitérant ce procédé, on montre l'unicité des a_i, donc l'unicité de la décomposition.

Ce qui correspond à l'écriture d'un nombre en base n et donc chaque sac peut être codé dans cette base et ce même codage donne directement le contenu exact du sac.