# l'harmonium à deux dimensions

par Thomas Eugénie, Mathieu Sarthe-Mouréou, Alexandra Vandenabelle, Daniel Marciniec, Matthieu Maigre Courvoisier
Lycées Georges Braque d'Argenteuil et Racine de Paris

enseignants : Pierre Audin, Joëlle Richard, Christine Rouaud

chercheur : Jean-Pierre Bourguignon

Le titre mystérieux nous a intrigué, pour certains l'aspect ludique du départ de la recherche a été déterminant, pour d'autres il s'agissait à première vue d'un sujet facile (additionner des entiers positifs et les diviser par quatre, c'est simple non ?).

***qu'est-ce qu'un harmonium à deux dimensions ?***

Non, ce n'est pas un instrument de musique !!

Prenons une grille de forme quelconque, sur le bord de laquelle on dispose des nombres entiers positifs.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 18 | | |
| 20 | | | | 11 | |
| 5 | | | | | 9 |
| | 12 | | | 16 | |
| | 15 | | | 18 | |
| | | 20 | 25 | | |

Dans un premier temps, on remplit toutes les cases intérieures avec la plus petite valeur du bord :

début du jeu

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 18 | | |
| 20 | 5 | 5 | 5 | 11 | |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 9 |
| | 12 | 5 | 5 | 16 | |
| | 15 | 5 | 5 | 18 | |
| | | 20 | 25 | | |

Le but du jeu est d'augmenter les valeurs à l'intérieur en respectant la règle suivante :
***chaque valeur est un entier positif ne dépassant pas la moyenne des quatre valeurs contenues dans les cases adjacentes.***

On s'arrête quand on ne peut plus augmenter ces valeurs sans enfreindre la règle. On est alors bloqué dans un ETAT FINAL.

une étape du jeu

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 18 | | |
| 20 | 11 | 10 | 5 | 11 | |
| 5 | 6 | 5 | 5 | 5 | 9 |
| | 12 | 8 | 5 | 16 | |
| | 15 | 11 | 5 | 18 | |
| | | 20 | 25 | | |

Etat final

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 18 | | |
| 20 | 14 | 15 | 14 | 11 | |
| 5 | 10 | 12 | 13 | 12 | 9 |
| | 12 | 13 | 15 | 16 | |
| | 15 | 16 | 18 | 18 | |
| | | 20 | 25 | | |

Nous avions des phénomènes — proposés par le chercheur — à observer. Mais nous n'en avons pas tenu compte au tout début.

Il s'agissait de remplir des grilles et toujours des grilles pour certains, et de trouver la formule (donnant l'état final) pour l'un d'entre nous. Il la cherche encore !!!

Au bout d'un certain nombre de grilles, nous avions remarqué des phénomènes :

— les valeurs à l'intérieur, lorsque l'on est arrêté, sont inférieures ou égales à la plus grande valeur du bord.

— lorsque toutes les valeurs au bord sont égales, on est bloqué dès le début.

— une symétrie appliquée au bord de la grille, crée la même symétrie à l'intérieur.

— quelque soit l'ordre dans lequel on remplit la grille, on obtient la même distribution à l'intérieur lorsque le jeu s'arrête : il y a donc un seul ETAT FINAL.

*démonstrations …*

***Principe du maximum :***

*Les valeurs à l'intérieur du domaine sont inférieures ou égales à la plus grande valeur prise au bord.*

Soit M la valeur la plus grande prise au bord, soit m la valeur la plus petite prise au bord, on peut supposer que m est différent de M, car si m est égale à M, la valeur de départ dans chaque case à l'intérieur du domaine ne peut être augmentée

— Début du jeu :

les valeurs à l'intérieur du domaine sont égales à m.

— Lorsqu'on joue pour la première fois :

soit y la valeur d'une case intérieur quelconque, y est supérieure ou égale à m et y ne peut être égale à M car la case ne peut être entourée de 4 fois M. Donc, toute case de l'intérieur a une valeur strictement inférieure à M.

— Etapes suivantes :

soit y' la valeur obtenue quand on a joué une deuxième fois, y'' sera pour la même raison strictement inférieure à M, car parmi ses voisins il y a au moins un point de l'intérieur donc strictement inférieur à M.

***Symétries / symétrie axiale***

*nombre impair sur un côté du domaine.*
[Les valeurs au bord sont symétriques par rapport à la colonne centrale.]

symétrie par rapport
à une colonne

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 7 | 5 | 7 | 9 | |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| | 9 | 7 | 5 | 7 | 9 | |

On peut choisir un mode de remplissage symétrique de la grille (c'est-à-dire remplir les cases de l'intérieur du domaine symétriquement par rapport à un axe)

démonstration :

Ce remplissage de part et d'autre de cette colonne se fera de la même manière, les cases étant entourées des mêmes valeurs et la colonne étant symétrique par rapport à elle-même.

*Nombre pair sur un côté du domaine*

[Le bord est symétrique par rapport à un axe :]

symétrie par rapport à un axe

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| 6 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 |
| 6 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 |
| 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| 0 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 6 | 6 | 2 | 6 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 6 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 |
| 6 | 3 | 2 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 6 | 6 | 2 | 6 |

Toute symétrie appliquée au bord du domaine crée la même symétrie à l'intérieur. La démonstration dépend de l'existence d'un état final unique.

symétrie quaternaire

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 10 | 12 | 14 | |
| 14 | 9 | 8 | 8 | 9 | 8 |
| 12 | 8 | 7 | 7 | 8 | 10 |
| 10 | 8 | 7 | 7 | 8 | 12 |
| 8 | 9 | 8 | 8 | 9 | 14 |
| | 14 | 12 | 10 | 8 | |

***Addition de grilles***

Lors du deuxième séminaire, nous avons exposé nos recherches sur l'existence d'un état final au chercheur, qui nous a suggéré d'essayer d'ajouter des grilles entre elles, c'est-à-dire ajouter les données au bord de deux grilles de même forme afin de comparer l'"état final" de grilles résultant de cette addition avec les "états finaux" des deux grilles initiales.

*Résidus non nuls*

exemple :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **2** | **4** | |
| **5** | $3^0$ | $3^3$ | **7** |
| **4** | $2^2$ | $1^3$ | **1** |
| **2** | $2^0$ | $1^2$ | **1** |
| | **3** | **2** | |

$4 + 3 + 7 + 1 = 15$
$15 = 4 \times 3 + 3$

3 est le reste dans la division de 15 par 4, on l'appelle ***résidu*** et on le note dans le coin supérieur droit de la case.

Deux grilles de même forme étant données à leur état final, nous les avons superposées : les valeurs au bord de deux cases correspondantes ont été additionnées ainsi que les valeurs à l'intérieur et leurs résidus.

exemple :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **2** | **4** | |
| **5** | $3^0$ | $3^3$ | **7** |
| **4** | $2^2$ | $1^3$ | **1** |
| **2** | $2^0$ | $1^2$ | **1** |
| | **3** | **2** | |

$+$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **5** | **8** | |
| **2** | $3^2$ | $4^2$ | **3** |
| **3** | $3^1$ | $4^2$ | **7** |
| **4** | $3^1$ | $4^0$ | **1** |
| | **2** | **9** | |

$=$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **7** | **12** | |
| **7** | 6 | 8 | **10** |
| **7** | 5 | 6 | **8** |
| **6** | 5 | 5 | **2** |
| | **5** | **11** | |

$$\begin{cases} 3^3 + 4^2 = 7^5 = 8^1 \\ 1^3 + 4^2 = 5^5 = 6^1 \end{cases}$$

Une fois ces calculs effectués, nous avons comparé cette grille somme avec la grille ayant les mêmes données au bord, remplie normalement, selon les règles du jeu :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **7** | **12** | |
| **7** | 6 | 8 | **10** |
| **7** | 5 | 6 | **8** |
| **6** | 5 | 5 | **2** |
| | **5** | **11** | |

$\neq$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **7** | **12** | |
| **7** | 7 | 9 | **10** |
| **7** | 6 | 7 | **8** |
| **6** | 5 | 6 | **2** |
| | **5** | **11** | |

Nous en avons donc conclu que la somme de deux grilles avec résidus non nuls ne correspond pas à l'état final de cette grille mais à une étape non finale du jeu.

*Résidus nuls*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathbf{A_1}$ | $\mathbf{B_1}$ | |
| $\mathbf{H_1}$ | $a_1$ | $b_1$ | $\mathbf{C_1}$ |
| $\mathbf{G_1}$ | $d_1$ | $c_1$ | $\mathbf{D_1}$ |
| | $\mathbf{F_1}$ | $\mathbf{E_1}$ | |

grille 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | |
| $\mathbf{H_2}$ | $a_2$ | $b_2$ | $\mathbf{C_2}$ |
| $\mathbf{G_2}$ | $d_2$ | $c_2$ | $\mathbf{D_2}$ |
| | $\mathbf{F_2}$ | $\mathbf{E_2}$ | |

grille 2

Les grilles 1 et 2 sont deux grilles à l'état final, elles ne contiennent que des nombres entiers sans résidu, c'est-à-dire qu'*aucune des valeurs à l'intérieur de cette grille n'a été arrondie une fois la moyenne effectuée.* Ainsi nous avons superposé les grilles 1 et 2, ce qui nous a donné la grille 3.

Donc :

$$A_1 + A_2 = A, \quad B_1 + B_2 = B,$$
$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad \text{etc} \ldots$$

> Une fois cette opération terminée, nous avons démontré que la grille 3 était à son état final donc que l'on ne pouvait plus augmenter les valeurs à l'intérieur de la grille.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathbf{A_1}$ | $\mathbf{B_1}$ | |
| $\mathbf{H_1}$ | $a_1$ | $b_1$ | $\mathbf{C_1}$ |
| $\mathbf{G_1}$ | $d_1$ | $c_1$ | $\mathbf{D_1}$ |
| | $\mathbf{F_1}$ | $\mathbf{E_1}$ | |

grille 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | |
| $\mathbf{H_2}$ | $a_2$ | $b_2$ | $\mathbf{C_2}$ |
| $\mathbf{G_2}$ | $d_2$ | $c_2$ | $\mathbf{D_2}$ |
| | $\mathbf{F_2}$ | $\mathbf{E_2}$ | |

grille 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | |
| **H** | a | b | **C** |
| **G** | d | c | **D** |
| | **F** | **E** | |

grille 3

*Démonstration :*

D'après les règles du jeu :

$$a_1 = (A_1 + b_1 + c_1 + H_1) : 4$$
$$a_2 = (A_2 + b_2 + c_2 + H_2) : 4$$

et en utilisant les égalités dues à la superposition des grilles 1 et 2, on a :

$$a = a_1 + a_2$$
$$a = (A_1+A_2 + b_1+b_2 + c_1+c_2 + H_1+H_2) : 4$$
$$a = (A + b + c + H) : 4$$

Ainsi a est bien une valeur de l'état final de la grille 3. En faisant de même pour b, c, et d, on trouve que a, b, c et d sont bien des valeurs de l'état final de la grille 3

***conclusion***

Après des mois d'ardentes recherches, il nous a été malheureusement impossible de résoudre “l'épineux problème de l'existence de l'état final”. Mais nous ne désespérons pas …

Un certain nombre d'aspects de ce qui paraît être uniquement un jeu ont été découverts voire même prouvés alors que d'autres (symétries raffinées, grilles “exotiques” dont on aurait divisé chaque case par quatre) sont restés dans l'ombre.