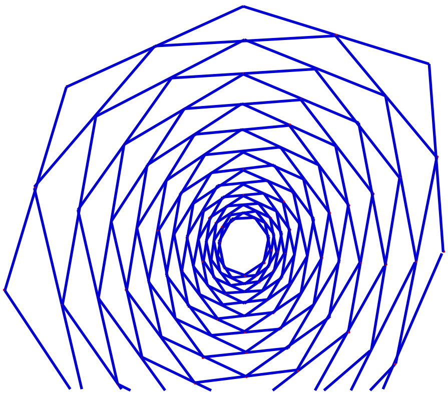
Math en Jeans ou Profs et chercheurs en Jeans ?

par Jacqueline Zizi, chercheur s'occupant du jumelage entre les collèges Victor Hugo de Noisy-le-Grand et André Doucet de Nanterre.



$$P_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \times \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

$$Q_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \times \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

295 ... 299	72	545 ... 549	134
300 ... 304	**74**	550 ... 554	**136**
305 ... 309	75	555 ... 559	137
310 ... 314	76	560 ... 564	138
315 ... 319	77	565 ... 569	139
320 ... 324	78	570 ... 574	140
325 ... 329	**80**	575 ... 579	**142**
330 ... 334	81	580 ... 584	143
335 ... 339	82	585 ... 589	144
340 ... 344	83	590 ... 594	145
345 ... 349	84	595 ... 599	146
350 ... 354	**86**	600 ... 604	**148**
355 ... 359	87	605 ... 609	149
360 ... 364	88	610 ... 614	150
365 ... 369	89	615 ... 619	151
370 ... 374	90	620 ... 624	152
375 ... 379	**93**	625 ... 629	**156**
380 ... 384	94	630 ... 634	157
385 ... 389	95	635 ... 639	158
390 ... 394	96	640 ... 644	159
395 ... 399	97	645 ... 649	160
400 ... 404	**99**	650 ... 654	**162**
405 ... 409	100	655 ... 659	163
410 ... 414	101	660 ... 664	164
415 ... 419	102	665 ... 669	165
420 ... 424	103	670 ... 674	166
425 ... 429	**105**	675 ... 679	**168**
430 ... 434	106	680 ... 684	169
435 ... 439	107	685 ... 689	170
440 ... 444	108	690 ... 694	171
445 ... 449	109	695 ... 699	172
450 ... 454	**111**	700 ... 704	**174**
455 ... 459	112	705 ... 709	175
460 ... 464	113	710 ... 714	176
465 ... 469	114	715 ... 719	177
470 ... 474	115	720 ... 724	178
475 ... 479	**117**	725 ... 729	**180**
480 ... 484	118	730 ... 734	181

Le titre de cet article est une question qui me vient à l'esprit en lisant le compte rendu des activités de notre jumelage, qu'il m'a été demandé de commenter. Il s'agit des articles intitulés :

- par combien de zéros se termine n! ? ; [p. 79]
- approximation des nombres rééls par des fractions continues ; [p. 109]
- opération des milieux des côtés. [p. 13]

Quand les professeurs deviennent les conseillers, voire les secrétaires de leurs élèves, on peut se le [1] demander. Chercher ensemble, travailler ensemble, critiquer ensemble, sont dans la pratique de l'enseignement de tous les jours des activités oubliées. Ensemble veut dire élèves, enseignants et chercheur. Les élèves apportent leur imagination et leur créativité. Les enseignants offrent leur bon sens, leur rationnalité et leur expérience, bien plus que leur connaissance. Quant au chercheur, c'est une présence à distance : observateur, vérificateur, parfois initiateur ou correcteur, il contrôle en fait les directions prises.

Il faut aussi signaler une autre présence discrète, comme l'est le chiffon et la craie ou le crayon et la gomme, le compas et la règle : c'est l'ordinateur.

De façon plus précise, voilà, vus par le chercheur, à partir des compte rendus précités réalisés par les enseignants à partir des données fournies par les élèves, ce qu'ont été le rôle des enseignants, de l'ordinateur et du chercheur dans le jumelage Noisy-le-Grand, Nanterre. Ces éléments qui constituent le ciment d'une réussite, sont présentés en réponse aux questions que l'on se pose tout naturellement avant de se lancer.

---

[1] NDLC : il s'agit du titre de cet article, qui est une question …
Recommencez au début !

QUI A CHOISI LES SUJETS ET COMMENT ?

Les 3 sujets étaient à l'origine :

1. Par combien de zéros se terminent n! ?

2. Fraction continue : quel nombre connu des élèves se cache derrière une fraction comme

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}$$

ou

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}} \quad ?$$

3. Que se passe-t-il si on itère une opération simple comme relier les milieux des côtés d'un polygone ?

Il y a lieu de se rapporter aux compte-rendus de ces trois sujets pour constater comment ils ont été largement traités et en quoi ils ont beaucoup évolué.

1. Le premier sujet a été choisi par le chercheur. L'historique est la suivante :

coup de téléphone :

— « bonjour je suis un des enseignants de votre jumelage Math en Jeans. Voilà comment les choses se passent … auriez vous un sujet ? »

— « Ouh là ! Ne quittez pas. Les bulletins APMEP, voyons voir, une question dont je ne connais pas la réponse mais qui me semble faisable : voilà ».

2. Le deuxième sujet résulte de la suite des évènements au téléphone :

« Que diriez-vous d'une question sur les fractions continues ?

— Oui pourquoi pas, mais ce ne sont pas forcément des élèves bons en maths. Ce sont des élèves de cinquième, quatrième et troisième et certains ont même été éjectés de la filière “normale” ».

Pour faire avaler la pillule des calculs à faire, on (chercheur et enseignant) a pensé que l'on pourrait aborder la question en commençant par des devinettes.

3. Quant au troisième sujet, les élèves en avaient un. On ne voyait pas très bien quel était le problème à résoudre, mais on (chercheur, élèves et enseignants) verrait bien.

Ce choix des trois sujets peut être vu comme le cocktail :

un sujet dans un domaine connu
+ un sujet dont on présuppose
qu'on doit pouvoir y arriver
+ un sujet d'aventure

ou :

un sujet très précis
+ un sujet cerné
à préciser suivant l'évolution
+ un sujet sans frontière
et sans problème précis
à résoudre a priori au départ

ou encore :

un peu de calculs
+ un peu de géométrie

ou enfin :

dialogue
entre enseignant
et chercheur.

ET SI ÇA NE VA, QUE FAIT-ON?

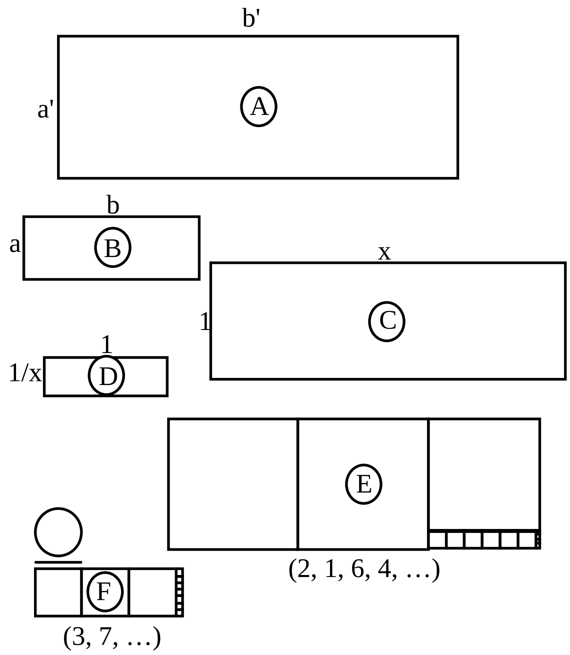
Au cours d'un jumelage comme au cours d'une vie familiale, on rencontre le meilleur et le pire. Le pari est de faire émerger, à la longue, un apport pour chacune des parties en présence (élèves, enseignant et chercheur), en respectant leur centre d'intérêt et leur ordre de valeur.

Voilà quelques toutes petites histoires, racontées au présent, car elles se situent hors du temps, dont chacun pourra s'inspirer pour se rassurer et se décider à plonger.

Quatre filles n'accrochent pas. Que faire ?

Tous ces calculs pour les fractions continues ne leur disent rien et d'ailleurs cela ne dit rien non plus à deux des enseignants. On (enseignant et chercheur) en discute à la première rencontre enseignant-chercheur, le chercheur offre une autre approche, en suivant une idée d'un mathématicien, Jean Bénabou, qui dirige depuis de nombreuses années, un séminaire sur les catégories. Il s'agit d'un séminaire de recherche sur une spécialité mathématique à laquelle s'intéresse le chercheur et qui n'a rien à voir, a priori, avec tous les sujets traités ici. Une image d'un instant qui a rejailli à l'occasion, comme cela arrive bien souvent. Cette fois, c'est une approche géométrique, plus constructive, mais aussi plus difficile : il ne s'agit plus de faire des calculs pour trouver un nombre qui se cache sous une fraction continue, mais au contraire de construire le développement en fraction continue d'un nombre appréhendé par des considérations géométriques très simples.

Dans l'encadré, les rectangles (A), (B), (C) et (D) sont des représentations (respectivement de $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{x}{1}$ et $\frac{1}{1/x}$) de la même forme de rectangle, c'est-à-dire du même nombre. Lorsque la largeur du rectangle est 1 comme dans le cas du rectangle (C), une représentation de ce même nombre est aussi l'aire du rectangle. Cette aire s'évalue en carrelant le rectangle à l'aide de carrés construits en utilisant le petit côté du rectangle, comme il est montré pour le rectangle (E), où il a été possible de mettre 2 carrés unités. Le reste, plus petit qu'un carré, est représenté de la même façon : il est possible d'inscrire 1 carré puis dans le reste, à nouveau, on peut construire 6 petits carrés et dans le reste, 4 petits carrés, etc.



Cette construction se réalise dans tous les cas où les nombres ont une représentation géométrique facile comme par exemple π (cf rectangle (F)). Cette nouvelle approche a fait TILT et nos élèves et enseignantes sont alors parties ensemble à l'aventure. Leurs investigations ont été couronnées de succès pour des nombres "simples" comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $1+\sqrt{2}$.

D'autre part, on a aussi offert un moyen informatique, avec lequel les élèves ont été priées de se débrouiller, pour vérifier ce qu'elles avaient trouvé, c'est-à-dire pour faire les calculs initialement demandés et que les élèves n'avaient pas envie de faire. Le logiciel, "Pour les Maths (1)", écrit par le chercheur tourne sur tous les PC même les plus petits et il met à disposition des utilisateurs un certain nombre de fonctions qu'il suffit de sélectionner. Une de ces fonctions, appelée Fraction-Continue remplit exactement la tâche désirée.

Son utilisation est immédiate. Par exemple, il suffit d'inscrire la suite des nombres (1 2 2 2) pour avoir une fraction réduite de la première fraction continue présentée au début de cet article. Des fonctions analogues existent en standard dans les systèmes de calcul formel ou sont très faciles à écrire (voir le livre 3 de la série "Mathématiques, Informatique et Enseignement" de Jacqueline Zizi).

La morale de cette histoire pourrait être : "avec des agissements pareils, ils ne sauront jamais calculer !" Eh bien il n'en n'est rien, car, comme on peut le constater en lisant le compte rendu de ce sujet :

• non seulement les élèves ont finalement fait les calculs demandés, car il faut bien, pour faire confiance à l'ordinateur, effectuer quelques sondages pour voir si ce qu'il donne est correct ;

• mais de plus, livrées à elles-mêmes, les élèves se sont lancées dans des calculs très complexes pour ce niveau et qu'elles ont parfaitement maîtrisé, l'aspect géométrique étant complètement sous-jacent dans ces moments. Pour s'en convaincre, le lecteur peut reprendre lui même les calculs non détaillés mais résumés dans la petite phrase:

« Ce faisant nous avons été amenées à résoudre des équations du deuxième degré à une inconnue et nous avons trouvé une méthode en utilisant les identités remarquables. Pour le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

nous avons trouvé :

$$P_n = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-3\sqrt{5}+5}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ »

Et si le lecteur trouve ces calculs élémentaires, ce qu'il serait raisonnable de penser s'il s'agit d'un enseignant ou d'un chercheur, qu'il les donne extraits de tout contexte à une demi-douzaine d'élèves de quatrième et troisième, même bons en maths.

Les élèves tournent en rond et ne sont pas d'accord. Comment débloquer la situation ?

Pour trouver une formule pour le problème des factorielles, plusieurs conjectures ont été faites qui se sont révélées fausses en utilisant les calculettes. Mais la calculette est très limitée et elle ne permet pas de départager deux groupes qui conjecturent des résultats différents sur un exemple précis : 125!. Les enseignants et le chercheur n'ont pas eu le temps de réfléchir à la question et sont donc incapables d'indiquer une direction au premier séminaire. Les élèves se demandent si ce problème a une solution à leur portée et demandent au chercheur s'il connaît la solution. La réponse est NON.

La stupéfaction passée, les élèves se sont remis à chercher et on a recours à un système de calcul formel qui départage les groupes en donnant immédiatement les factorielles sujets de contestation, c'est-à-dire localement, au coup par coup : factorielles 124, 125, 126 par exemple.

Le jour du deuxième séminaire nous apporte des surprises :

• Un élève arrive avec une formule-solution miracle. On ne sait pas trop comment il a fait ni non plus si ce qu'il a trouvé est vrai. On l'écoute, on sent que ce qu'il a fait est correct. Pour s'en assurer, on demande que soit fait un exposé dessus au prochain séminaire avec pour objectif de travailler la communication et l'exposé avec utilisation de transparents.

• En même temps un autre élève expose ses recherches : il s'agit d'une analyse très fine du problème, mais non achevée, si bien qu'il n'y a aucun rapport entre les "résultats" de ces deux élèves. Ici, on encourage, avec pour objectif de produire une formule simple pour favoriser une synthèse de ce travail.

Aussi, sommes-nous très contents (enseignants et chercheurs) lorsqu'une autre élève, le séminaire suivant, commence l'exposé du groupe par :

« Excusez-nous, nous ne savons pas si ce que nous allons vous exposer est vraiment ce qu'il faut, parce que ce n'est vraiment pas comme on fait en classe d'habitude pour démontrer, mais, nous maintenant on a une formule, on en est sûr, on a tous compris et on est tous d'accord. »

Il est à noter que le "on" représente tous les élèves du groupe et donc d'établissements et de niveaux scolaires différents.

Les élèves disent ne rien trouver. Faut-il abandonner ?

Le groupe très hétérogène de l'opération des milieux des côtés (élèves de cinquième et de troisième) est fragmenté.

Au premier séminaire, on demande un historique des recherches. On comprend que certaines choses ont été trouvées mais laissées de côté sous le stress de questions non résolues.

On demande un exposé propre avec démonstrations détaillées des points trouvés. On (le chercheur) offre ensuite des posters faits par ordinateur à construire. Ils sont délaissés au bénéfice de très beaux dessins tout en couleur réalisés par les élèves les plus jeunes. C'est ainsi que le groupe se ressoude.

On demande (enseignants et chercheur) que la mise en forme demandée pour le séminaire qui précède le congrès comporte deux parties distinctes avec deux objectifs précis :

• clarifier les cas traités : hypothèses de travail et démonstrations ;

• dresser une liste de questions intéressantes non résolues.

Pour cette deuxième partie, il faut beaucoup insister et chercher des arguments convaincants, car elle n'est pas du tout prise au sérieux par les élèves. Pour eux on a gagné seulement quand on a trouvé. Le reste n'existe pas.

Que faire quand on a l'impression que rien ne va marcher ?

Il ne faut pas croire que si des exposés sont bien faits un mois avant le congrès, on peut dormir sur ses deux oreilles. En effet, si effectivement les élèves sont prêts un mois avant, alors, comme le but est atteint et comme il n'est pas possible d'enrayer l'envie de recherche qu'on a déclenché, ils partent sur d'autres pistes.

Ce sont alors ces sujets qui les intéressent et il est difficile de les motiver pour retravailler sur les parties prêtes un mois auparavant. Ce n'est que dans les quelques heures qui précèdent l'exposé que la motivation revient et là, c'est la fébrilité, la course et l'angoisse pour tout le monde.

Le rôle des enseignants dans ces moments est déterminant. Eux seuls, car ils connaissent bien les réactions de leurs élèves, savent, en effet, mener la barque et décider s'il faut passer une nuit à travailler ou tout laisser tomber. C'est de leur feeling et de leurs réflexes que dépend la réussite ou la catastrophe.

Que faire quand la direction prise n'est pas celle souhaitée?

Lorsque l'on connaît un chemin simple, il est difficile de réfreiner les envies que l'on a de faire à la place des élèves ou de leur montrer ce chemin et de les orienter.

Mais en principe, à ce que j'ai compris, à Math en Jeans, le rôle des adultes n'est pas directif. Accepter de jouer c'est donc respecter ce principe. En réalité, les élèves d'eux mêmes voient bien ce qui ne va pas ou est améliorable. A propos des fractions continues, en effet, on peut lire dans le compte rendu :

« Nos formules sont compliquées mais intéressantes. »

Et c'est vrai. L'avenir dira s'il est possible de faire mieux, c'est-à-dire plus simple.

En mathématiques comme en informatique symbolique, la construction à partir d'éléments de base est un processus fondamental. Il importe que les éléments primitifs soient le plus simple et le plus solide possible et la réserve "compliquées" montre bien que ce principe est ressenti. Ceci, à mon sens, est un aspect très positif d'un chemin que l'on n'aurait pas pris soi même.

Cet exemple et d'autres sont des aides psychologiques importantes pour respecter l'esprit non dogmatique et non directif qui règne dans les expériences Maths en Jeans.

Autre exemple, le traitement informatique des questions qui se sont présentées. On pourrait les balayer et s'en moquer, tant il est vrai qu'aujourd'hui ces traitements sont dépassés ou plutôt démodés. En fait, ils sont la preuve de :

• l'ignorance d'autres façons de faire plus naturelles et plus mathématiques ;

• l'intégration de l'informatique dans les pratiques disciplinaires ;

• la prise en main par les élèves du phénomène informatique : c'est pour les élèves un moyen d'investigation et d'expression naturel chez les jeunes, tout autant qu'un outil.

Il n'est donc pas étonnant que cette année, au moment du choix des sujets, l'informatique soit sortie de l'ombre. Un des sujets, d'ailleurs pas coopté par l'ensemble des enseignants concerne l'informatique.

COMMENT SAVOIR SI L'EXPÉRIENCE EST POSITIVE ?

Une première méthode consiste à demander aux trois parties concernées et à écouter.

C'est ce qu'ont fait des spectateurs à la fête de la science au ministère de la recherche où quelques élèves étaient venus exposer leurs idées et leur travail (c'était aussi le jour de la fête des mères).

Les réponses faites nous (adultes) ont sidéré par leur maturité et leur richesse. Dommage, ce dialogue spontané n'a pas été enregistré.

Une deuxième méthode consiste à voir si les partenaires sont prêts à recommencer : c'est déjà plus facile à quantifier mais il faudra attribuer une valeur particulière à ce qui se présente comme des cas initialement non prévus. Par exemple, des élèves de troisième partis au lycée ont demandé à être associés à l'expérience Math en Jeans du collège où ils étaient élèves l'année précédente. Autre exemple, un enseignant est absent assez longtemps pour une raison médicale sérieuse.

Aussi, pour dresser un bilan, dans ce cas, comme en informatique, il faut analyser la situation, essayer de la reproduire avant de pouvoir abstraire des généralités. Le suspens est commencé …

QUI RÉDIGE LES ACTES ET COMMENT CELA SE PASSE-T-IL ?

Les élèves tiennent tout au long de l'année un cahier de bord très détaillé de leurs activités. Réussites échec, qu'importe, tout ce qui semble significatif y est transcrit. C'est à l'enseignant de contrôler que cette astreinte est bien remplie. Je dis astreinte car vue d'un point de vue extérieur, c'en est une. Mais en fait les élèves le remplissent avec goût et amour et la preuve en est qu'un des groupes, sachant que le chercheur était en déplacement pour un bon moment, n'a eu de cesse que lorsque l'enseignant a accepté d'envoyer une copie du dit cahier pour que le chercheur le trouve dès son retour.

Pour le congrès, on (les élèves - avec les critiques des enseignants et chercheurs) prépare des transparents et des panneaux pour l'exposition, souvent réalisés au tout dernier moment. Les transparents et panneaux sont un point de vue global du travail effectué dans l'année.

Après le congrès, on (enseignants, chercheurs et élèves) fait le point.

A partir de ces trois éléments, quelqu'un se dévoue pour rédiger les textes qui paraîtront dans les actes. Ici intervient l'ordinateur. Les élèves des collèges n'ont pas à leur disposition, et d'ailleurs, souvent, ils ne savent pas manipuler un traitement de textes scientifique. C'est donc un enseignant volontaire qui se charge de cette tâche. A lire les compte rendus, d'ailleurs, on comprend qu'il ne s'agit pas de tâche, mais de travail de synthèse fait gratuitement avec beaucoup d'attention de soin et d'amour.

CONCLUSION

A titre de conclusion, je voudrais indiquer que les feux de cet article sont dirigés sur les enseignants, un peu comme un pari difficile à tenir, tant il est vrai qu'à Math en Jeans, on est plutôt tournés vers les mathématiques et les jeunes.

En fait le rôle des enseignants, bien qu'ils n'interviennent pas explicitement, est déterminant.

Aux exemples précédents, j'ajouterai, même si c'est banal, que l'enseignant rédacteur des compte rendus a pris sur son temps et même sur son argent bien avant tout ça, pour être capable de dépasser les problèmes techniques et de fournir un texte propre et agréable à lire.

Il avait été question, à un moment, de récompenser les enseignants méritants, puis on n'en n'a plus entendu parler peut-être parce que comme dans cette très noble assemblée où je suis allée dernièrement, on croit que :

« Il n'y a plus de bons enseignants de mathématiques. »

Cette croyance m'apparaît fausse et je suis persuadée que les enseignants que j'ai rencontrés dans cette expérience sont tous de très bons enseignants. Voilà donc quatre contre-exemples à la proposition précédente. Bien sûr je peux me tromper, mais encore faudrait-il me le démontrer et je suis prête à inviter toute personne intéressée par ce challenge.

Jusqu'à preuve du contraire, il existe donc de bons enseignants. Comment les discerner et les récompenser ? Il y a mille et une manière et des tas de critères.

En voici un et une, non contestables, indispensables dans l'exercice de notre métier dans l'environnement social d'aujourd'hui et facile à organiser. Il s'applique aussi bien aux enseignants en poste qu'aux futurs enseignants. Une prime, par exemple en espèces trébuchantes ou de quelques points sur leur notation, pourrait être offerte aux enseignants volontaires et capables de reproduire correctement avec le traitement de textes de leur choix, en un temps raisonnable, un texte d'examen correspondant à leur enseignement.

Oserais-je faire remarquer un avantage de cette proposition ? Pour ce genre d'épreuves, il n'est pas utile de savoir faire pour juger et donc la vérification pourrait se faire sans envisager des frais importants de formation du corps de l'inspection et sans risque d'échec de ce côté.

Quant aux chercheurs, voici une autre idée : pourquoi les commissions de recrutement et d'évaluation des chercheurs et tout particulièrement ceux dont le métier est l'étude des "sciences de l'éducation", ne tiendraient-ils pas compte, au même titre que les articles de pédagogie théorique ou de didactique tout aussi théorique, d'expériences pratiques "vraies" sur le terrain reconnues positives, par exemple par les élèves de Math en Jeans ?

Pour terminer, voici une dernière question, à 50 000 Francs, cette fois. Quelles différences y a-t-il entre un inspecteur dans la vie scolaire habituelle et un chercheur de Math en Jeans ?

Jacqueline Zizi
Ile Saint Amour
91120 PALAISEAU

19 novembre 1993