les pentaminos

par Caroline Goux, Diane de La Bastille, Pauline Le Bihan, élèves de seconde du lycée Alfred Kastler de Cergy (95)

enseignantes : Claude Matz, Annie Soismier

chercheur : François Digne

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe :

CLG de Nézant
TRES INTÉRESSANT ET TRES COMPRÉHENSIBLE. Avec les 12 pentaminos, lesquels font une frise et lesquels n'en font pas ? Il y en a 8 qui frisent une bande, et 4 qui n'en font pas. Et ils ont cherché pour les pentaminos des axes de symétrie.

CLG Condorcet
— Ils ont travaillé avec un assemblage de pentaminos pour faire des bandes et ont cherché des axes de symétrie dans les pentaminos
— Il faut paver une bande, composée de strates, à l'aide de pentaminos qui, associés entre eux, forment une frise.
— Ils ont fait un travail d'assemblage de pentaminos (5 cubes). Travail très intéressant. Puis ils ont cherché des axes de symétrie.

---

lettre de Mmes Annie Soismier et Claude Matz, animatrices "MATh.en.JEANS" au lycée Alfred Kastler pendant l'année 1994-95, postée de Cergy, le 15 octobre 1994.

« Nous nous sommes décidées, après de longues hésitations, à publier les écrits de nos élèves.

« Comme vous pourrez le constater, ces travaux présentent peu de réflexion mathématique, les justifications qu'on peut attendre n'apparaissent pas ; prenez-les comme la véritable production de nos élèves.

« A leur décharge, nous pouvons dire que nous avons fonctionné
• 1 heure par semaine, ce qui est tout-à-fait insuffisant pour le travail en groupe
• avec des élèves issus d'une même classe de Seconde (les sujets n'étant peut-être pas adaptés à eux)
• avec un jumelage qui n'a pas permis un bon échange mathématique (lors des séminaire mais aussi lors de la phase finale, au moment de la rédaction des écrits).

« Ce relatif échec prouvera, si besoin est, que certaines conditions de fonctionnement sont indispensables à la bonne marche d'un projet "MATh.en.JEANS". »

[NDLR : c'est imparfait, mais nous sommes persuadés que c'est utile.

Le thème des pavages, et ici plus particulièrement des frises, est très attractif et offre une riche activité de recherche.

Malheureusement, les mots et les idées les plus nécessaires pour organiser et comprendre un pavage, même périodique, sont entièrement hors des préoccupations mathématiques habituelles à l'Ecole. Sans une aide appropriée à la formulation et à la compréhension, l'activité risque de ne pas déboucher sur des résultats véritablement acquis, tant sont nombreux les objectifs que peut se fixer une telle activité : concepts de périodes, de motifs, de régions fondamentales, de transformations géométriques, de groupes, de vecteurs, d'espaces vectoriels … preuves par récurrence et par l'absurde, concepts d'ensembles et inclusions, concepts de définition d'une notion mathématique …

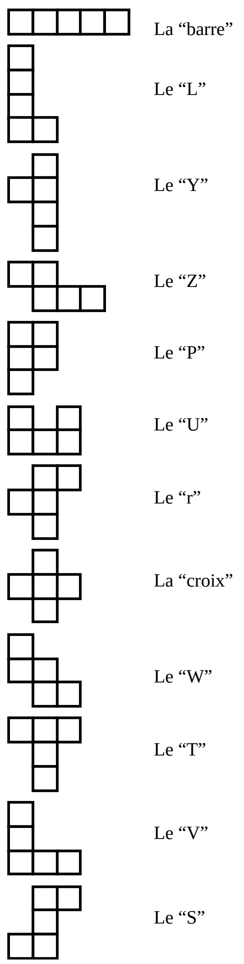
Du travail de ces élèves, nous avons extrait quelques passages ou documents qui fournissent à notre avis des questions intéressantes à creuser, chacune pouvant à elle seule constituer une piste de recherche fructueuse.]

Présentation du sujet : Est-il possible de paver une bande avec tous les pentaminos et selon une symétrie connue ?
Nous nous sommes demandé quelles étaient les frises accessibles par les pentaminos et quelles étaient les symétries utilisées.

Définitions :

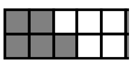
Pentamino : assemblage de cinq carreaux reliés par au moins un de leurs côtés.

Les différents pentaminos et leur appellation respective.



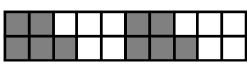
Motif :

ensemble d’un ou plusieurs pentaminos. Exemple :



Frise :

juxtaposition d’un motif qui remplit entièrement une bande délimitée par deux droites parallèles. Exemple :



Les différents types de frises .

A chaque frise, on associe un dessin qui a les mêmes possibilités de transformation que cette frise :

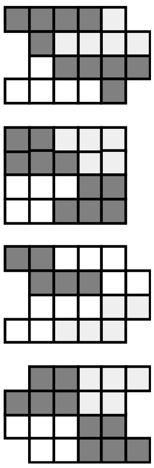
Motif	**Transformation interne au motif**	**Transformations qui laissent la frise invariante**	**Frise**
⌈	Ø	Translation	⌈ ⌈ ⌈ ⌈ ⌈ ⌈
[	Symétrie axiale horizontale	Translation & symétrie axiale horizontale	[[[[[[
⌈ ⌉	Symétrie axiale verticale	Translation & symétrie axiale verticale	⌈ ⌉ ⌈ ⌉ ⌈ ⌉
⌈ • ⌋	Symétrie centrale dont le centre apparaît sur la figure	Translation	⌈ ⌋ ⌈ ⌋ ⌈ ⌋
[ ]	Symétrie axiale verticale, symétrie axiale horizontale donc symétrie centrale	Translation symétries axiales verticales, symétries axiales horizontales donc symétries centrales	[ ] [ ] [ ]
⌈ ⌊	Rotation de 180 °et symétrie axiale verticale	Translation	⌈ ⌊ ⌈ ⌊ ⌈ ⌊
⌈ ⌉ ⌊ ⌋ ⌈ | ⌉ • ⌊ ⌋	Symétrie centrale par rapport au point noté, symétrie verticale par rapport à l’axe noté	Translation, symétrie axiale verticale	⌈ ⌉ ⌊ ⌋ ⌈ ⌉ ⌊ ⌋

Pour chaque type de frise nous avons cherché quels pentaminos permettent un motif de ce type.

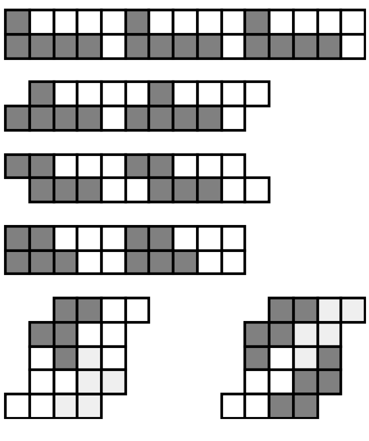
le type : ⌈⌈⌈
Tous les pentaminos qui pavent une bande font au moins le type de frise ⌈⌈⌈.

En effet, la seule transformation que permet ⌈ est la translation ; or le principe même de la frise est de paver une bande par translations …

le type : [[[
Méthode : partir de la symétrie cherchée pour démarrer la construction du motif.



le type : ⌈⌋⌈⌋
Si un pentamino pave une bande avec une symétrie centrale et une symétrie axiale verticale alors on a automatiquement une symétrie axiale horizontale donc le type de frise cité.



Problème :
Quels pentaminos pavent une bande selon cette symétrie ? (voir figures ci-avant)

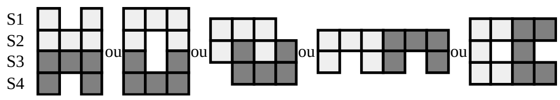
Les pentaminos qui ne permettront jamais de paver une bande :

“U”, “la croix”, “T”, “S” ne permettront pas de paver une bande.

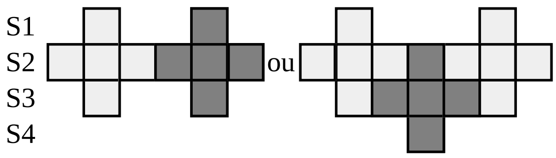
Démonstration :

[NDLR : il s’agit plutôt d’arguments pouvant servir dans une preuve ; les résultats sont néanmoins corrects.]

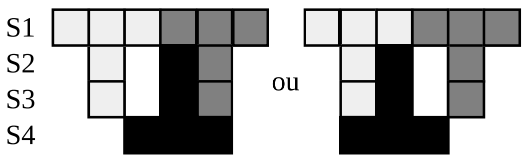
Quelle que soit la position de “U” en S_1 le pavage de S_1 est impossible. “U” ne permet pas de paver une bande :



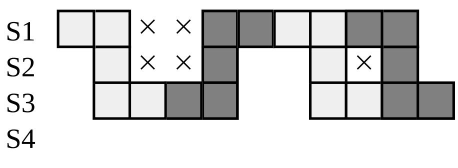
Quelle que soit la disposition de “la croix” en S_1, le pavage de cette strate est impossible. Donc “la croix” ne permet pas de paver une bande :



Le “T” permet de paver la première strate : S_1. Mais, ensuite, quelle que soit sa position, il ne permet pas de paver la deuxième strate :

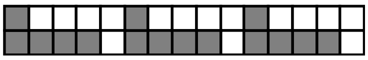


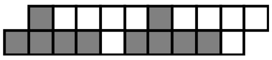
Le “S” ne permet pas le pavage de S_1 sans empêcher celui de S_2 donc “S” ne permet pas de paver une bande :

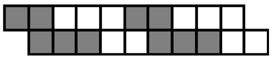


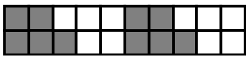
Les pentaminos qui permettent de paver une bande.

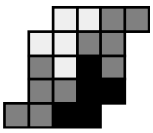

Vérifie toutes les symétries.

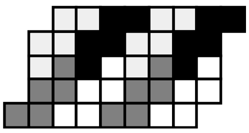

Translation et symétrie centrale.

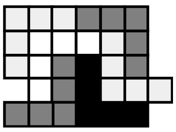

Translation et symétrie centrale.


Translation et symétrie centrale.


Translation et symétrie centrale.


Translation et symétrie centrale.


Translation et symétrie centrale.


Pas de symétrie (mais translation dans la bande).

[NDLR : il est bien facile de *montrer* (par un simple dessin, pourquoi pas ?) qu'il y a invariance par translation et par symétrie centrale, mais il n'est pas si simple de se contenter d'un dessin où *on n'a rien vu d'évident* pour affirmer qu'*il n'y a rien non plus de caché* : il faudrait ***prouver*** qu'il n'y a pas de symétrie !]