communication sur une grille

par Cécile Cayrel (3ème) et Eric Barrière (4ème), élèves du collège Condorcet de Pontault-Combault (77) et Jérôme Auger, Thomas Féron, Gilbert N'Guyen, Livis Yalap, tous élèves de 5ème du collège l'Ardillière de Nézant de Saint-Brice (95)

enseignants : Yann Bourit, Hervé Grac

chercheur : Pierre Duchet

[Commentaire du chercheur : Au moment où l'algèbre linéaire disparait des programmes de lycées, il est tentant de voir ce que des collégiens font avec des vecteurs (ce mot est apparu comme plus commode au cours de l'activité, mais c'est le mot "règle" qui était utilisé au départ).

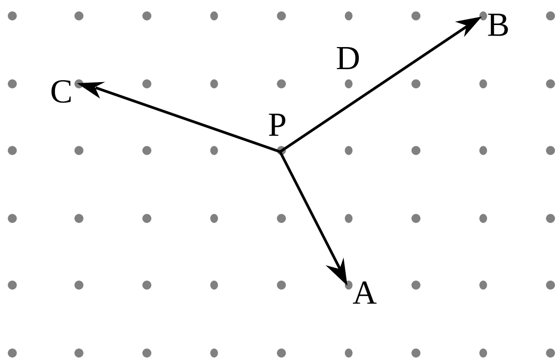
Les deux groupes du jumelage ont obtenu le même théorème (théorèmes 2 et 3) par des approches différentes (1 ou 2 dimensions). Les résultats obtenus posent des questions originales, qui sont, à ma connaissance, ouvertes.

Ce sujet — aux confins de l'arithmétique et de l'algèbre vectorielle — est inspiré d'un problème ouvert : étant donné un entier n et k vecteurs à coordonnées entières, combien de combinaisons entières différentes de ces vecteurs réalisent une somme de leurs coefficients égale à n ? Il est prouvé (1992) que, pour k fixé, ce nombre est un polynôme en n, mais les coefficients de ce polynôme ne sont pas connus.]

Des personnes (ou, si vous préférez, des relais électroniques …) sont disposées sur un plan en formant un réseau à maille carrée. Chaque personne peut communiquer des informations à certaines autres personnes, à condition de respecter certaines règles ; ces règles sont les mêmes pour toutes les personnes.

exemple : chaque personne P peut informer :

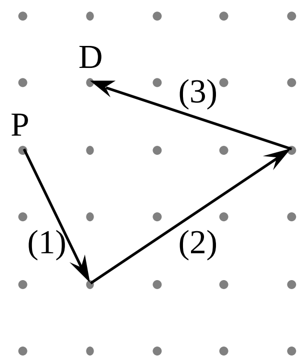
• la personne A située 1 pas à l'est, 2 pas au sud
• la personne B située 2 pas au nord, 3 pas à l'est
• la personne C située 1 pas au nord, 3 pas à l'ouest.



Pour la commodité de l'exposé nous avons traduit ces règles par trois vecteurs du plan : (1 ; -2) ; (3 ; 2) ; (-3 ; 1).

Ainsi, P ne peut pas informer directement la personne D, qui est pourtant proche : 1 pas à l'est, 1 pas au nord.

Par contre, on peut informer D en trois étapes :



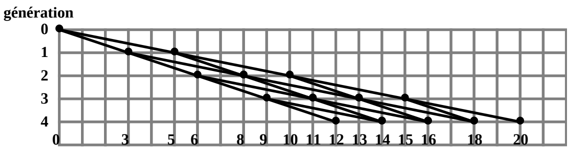
première étude

Dans cette partie, on étudie le problème sur une droite en n'utilisant que deux règles.

Exemple : on utilise les règles +3 et +5. Imaginons que chaque point de la droite soit une lampe que nous allumons avec la règle d'allumage suivante :

• La lampe de rang n allume les deux lampes de rang n+3 et n+5.

• A la génération 0, seule la lampe de rang 0 est allumée.



Théorème 1 :

Soit les deux nombres *a* et *b* constituant nos règles, alors si *a* < *b*, et si on allume *a* lampes consécutives, on allumera toutes celles qui suivent.

Démonstration : [En utilisant les règles +3 et +5 de l'exemple précédent.] Si nous avons déjà allumé les lampes de rang x, x+1 et x+2, pour allumer la lampe de rang x+p il faudra faire:

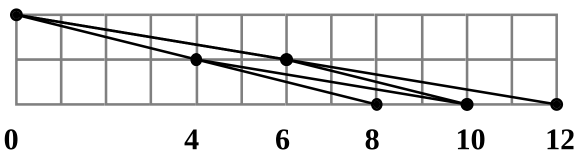
$x + 3k$ si p est un multiple de 3 ($p = 3k$)

$(x + 1) + 3k$ si $p = 3k + 1$

$(x + 2) + 3k$ si $p = 3k + 2$.

Après cela nous nous sommes posé une question : si on change de règles d'allumage, à quelle condition allumera-t-on toutes les lampes ?

Exemple : Essayons avec les règles +4 et +6.



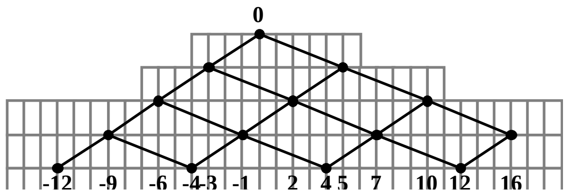
Ceci est une impossibilité car les deux nombres choisis sont pairs et nous ne pourrons jamais avoir les nombres impairs. Autre impossibilité : les règles +6 et +9, puisque 6 et 9 ont un diviseur commun nous n'aurons que les multiples de trois.

Avec a et b premiers entre eux , on a constaté qu'on allumait toutes les lampes à partir d'un certain nombre x. Voici quelques résultats que nous avons trouvé en les essayant :

a	b	x
+4	+9	24
+3	+5	8
+4	+7	18
+3	+7	12
+4	+5	12

Avec ce tableau nous avons pensé à une **conjecture** : $x = a \times b - (a + b) + 1$

Nous restons toujours sur la droite mais maintenant *on considère des règles utilisant un nombre positif et un nombre négatif*, par exemple -3 et +5.



les impossibilités

Avec certaines règles de communication nous remarquons que nous n'avons jamais tous les points de la droite. Par exemple les règles -6 et +9, car 6 et 9 ont pour diviseur commun 3 et nous n'obtiendrons que les multiples de 3.

Théorème 2 :

[Avec une règle positive et une règle négative,] si nous arrivons à allumer les points +1 ou -1 alors nous arriverons à allumer tous les points de la droite.

Sur la figure précédente, nous avons atteint -1 à la génération 4 donc nous aurons tous les nombres négatifs et comme à la génération 1 nous avons +5 nous faisons :

+5 -1 = +4

+4 -1 = +3

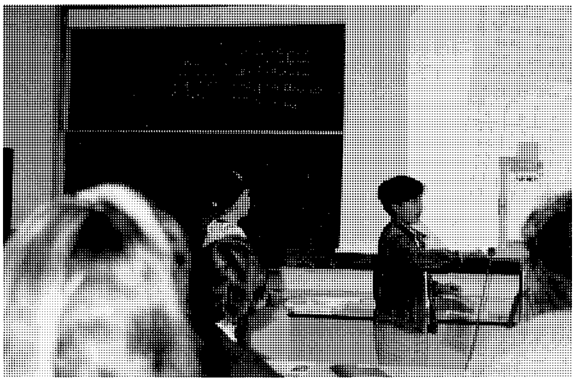
+3 -1 = +2

+2 -1 = +1

maintenant que nous avons obtenu +1 nous aurons tous les nombres positifs.

Conjecture :
Si *a* et *b* sont premiers entre eux alors nous atteindrons les points +1 et -1.

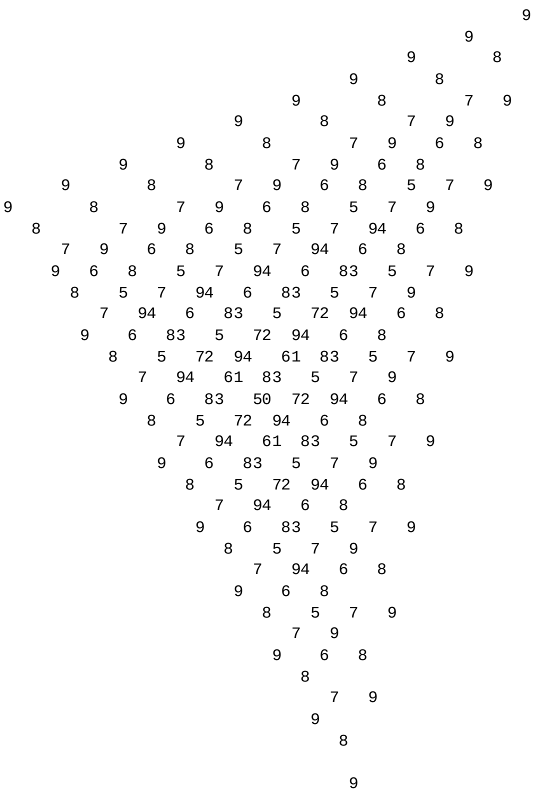
Nous avons fait plusieurs expériences qui vérifient notre conjecture mais nous n'avons jamais pu la prouver. [NDLR : il s'agit du *Théorème de Bezout*.]



deuxième étude
Dans cette partie notre recherche à porté sur le problème posé dans le plan.

la suite triangulaire

A partir de plusieurs schémas faits à la main nous avons observés qu'une suite se dessinait. Nous partons d'un seul point P qui correspond à l'étape 0. Puis de ce point nous allons appliquer trois vecteurs qui vont tous dans des directions différentes, nous obtiendrons les trois points de l'étape 1 et ainsi de suite pour chaque étape indéfiniment.



[NDLC : en chaque point est inscrit un chiffre de 0 à 9 correspondant au numéro de l'étape à laquelle on peut arriver en ce point.]

Règles : vecteur 1 : 3 2
vecteur 2 : –3 1
vecteur 3 : 1 –2

étape	simple	double	triple	nouveau	réinformé
0	1	0	0	1	0
1	3	0	0	3	0
2	3	3	0	6	0
3	3	6	1	10	0
4	3	9	3	15	0
5	3	12	6	21	0
6	3	15	10	28	0
7	3	18	15	36	0
8	3	21	21	45	0
9	3	24	28	55	0

Appelons $f(n)$ le nombre de nouveaux points obtenus à l'étape n. Après plusieurs essais nous nous sommes aperçus que les valeurs de $f(n)$ suivaient en général la suite 1, 3, 6, 15, 21, 28, 36, 45, … et nous avons cherché un lien entre ces nombres en calculant les différences entre deux valeurs consécutives :

$$3 - 1 = 2$$
$$6 - 3 = 3$$
$$10 - 6 = 4$$
$$15 - 10 = 5$$
etc…

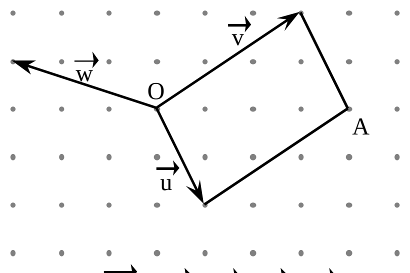
Cette suite commence par le nombre 1 à l'étape 1 et à l'étape n on obtient :

$$f(n) = f(n-1) + n.$$

On reconnaît là la suite connue sous le nom de suite triangulaire dont le n-ième terme est donné par la formule :

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = n(n + 1)/2.$$

Puis nous avons mis au point un programme qui nous a permis d'afficher sur un écran d'ordinateur les points obtenus à chaque étape. Nous nous sommes aperçus que certains points étaient atteints plusieurs fois à la même étape, ceci étant une conséquence de la commutativité de la somme des vecteurs.



$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

la suite triangulaire ne fonctionne plus

On a remarqué que, dans certains cas, le nombre de nouveaux points ne suivait plus la suite triangulaire à partir d'une étape n et augmentait alors de n en n à partir de cette étape.

Exemple : la suite triangulaire ne marche plus à la 4° étape.

Règles :			
	vecteur 1 :	2	0
	vecteur 2 :	–2	2
	vecteur 3 :	–2	–2

étape	simple	double	triple	nouveau	réinformé
0	1	0	0	1	0
1	3	0	0	3	0
2	3	3	0	6	0
3	3	6	1	10	0
4	3	9	3	14	1
5	3	12	6	18	3
6	3	15	10	22	6

numéro de l'étape	**nombre de nouveaux points**	**suite triangulaire**	**différence**
1	1	1	
2	3	3	
3	6	6	
4	10	10	
5	14	15	1
6	18	21	3
7	22	28	6
8	26	36	10
9	30	45	15
10	34	55	21
11	38	66	28

sur le terrain :

```
6
  5 6
6   4 5 6
  5 6 3 4 5 6
6   4 5 2 3 4 5 6
  5 6 3 4 1 2 3 4 5 6
6   4 5 2 3 0 1 2 3 4 5 6
  5 6 3 4 1 2 3 4 5 6
6   4 5 2 3 4 5 6
  5 6 3 4 5 6
6   4 5 6
  5 6
6
```

[NDLC : mêmes conventions qu'à la page précédente.]

A la n° étape, le point 1 est réinformé ; le nombre de nouveaux points ne suit plus la suite triangulaire et il y a une différence de 1.

A la (n+1)° étape, les points de la 2° étape sont réinformés ; le nombre de nouveaux points est inférieur de 3 à celui de la suite triangulaire.

A la (n+2)° étape, les points de la 3° étape sont réinformés ; le nombre de nouveaux points est inférieur de 6 à celui de la suite triangulaire.

etc …

Cette propriété est vraie pour toutes les règles que nous avons essayées, mais pour certaines règles ce n'est pas le point 1 qui est réinformé le premier.

Exemple d'exception :

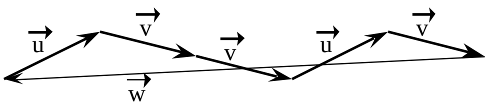
Règle :			
	vecteur 1 :	5	5
	vecteur 2 :	–5	7
	vecteur 3 :	–2	4

La suite ne fonctionne plus à la 10° étape et ce n'est pas le 1 qui est réinformé le premier. Mais la suite augmente quand même de 10 en 10 à partir de la dixième étape.

A quelle étape réinforme-t-on le point 1 ?

Nous avons tout d'abord trouvé d'une manière empirique des règles permettant de réinformer le point 1 en 1, 2, 3, …, 15 étapes et il nous a semblé que l'on pouvait créer des règles de manière à atteindre le 1 en *n* étapes. Voici ***une méthode*** :
* prendre deux des trois vecteurs au hasard,
* avec ces deux vecteurs construire une somme de (*n*-1) vecteurs,
* prendre pour 3° vecteur l'opposé de cette somme.

Exemple :



$\vec{w}$ = opposé (2 $\vec{u}$ + 3 $\vec{v}$)

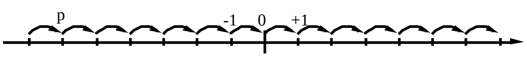
Le problème inverse — les règles étant données, à quelle étape le point 1 est-il réinformé — est un problème plus difficile pour lequel on n'a trouvé qu'une partie de réponse.

Un procédé pour déterminer à quelle étape le point 1 est réinformé dans le ***cas de la droite*** :

Théorème 3 : [NDLR : équivalent au théorème 2, page 46] **Si on arrive à atteindre +1 ou -1, avec deux nombres *p* positif et *n* négatif, alors on aura tous les points de la droite.**

En effet, supposons qu'on arrive à +1 en partant de 0, en faisant un certain nombre de mouvements qu'on appelle *X* ; en refaisant *X* on arrivera à +1+1=+2, puis à +2+1=+3 et ainsi de suite : on est sûr de pouvoir atteindre tous les points positifs.

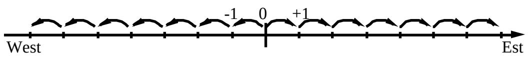
D'autre part, en partant de *n* (négatif) et en faisant *X* on atteindra *n*+1, puis en refaisant *X* autant de fois que nécessaire on arrivera à -1, et par le raisonnement du paragraphe précédent, on est sûr d'obtenir tous les points négatifs.



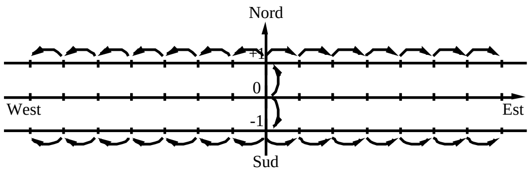
Peut-on informer tous les points du plan ?

Théorème 4 :
Si on arrive à atteindre les 4 voisins de 0 (1 au nord, 1 au sud, 1 à l'ouest et 1 à l'est) alors on est sûr de pouvoir atteindre tous les points de la grille.

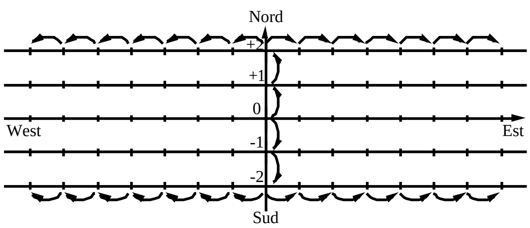
Si on a 1 à l'est et 1 à l'ouest, on pourra atteindre tous les points de la droite horizontale qui passe par 0 en faisant des mouvements qu'on peut appeler *Y* (voir le raisonnement du théorème précédent).



Mais comme on peut aller aussi à 1 au nord et 1 au sud, par les mouvements *Y* on pourra atteindre tous les points des droites horizontales qui passent par 1 au nord et 1 au sud.



Puis, si on peut aller à 1 au nord et 1 au sud, on peut aussi aller à 1 nord + 1 nord = 2 nord et à 1 sud + 1 sud = 2 sud et par les mouvements *Y* on pourra atteindre tous les points des droites horizontales qui passent par 2 au nord et 2 au sud.

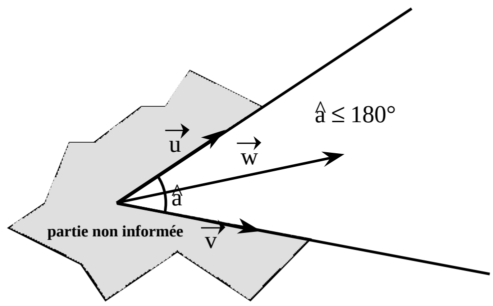


Et ainsi de suite …

… de proche en proche, on est sûrs de pouvoir atteindre tous les points de toutes les droites horizontales, c'est-à-dire tous les points de la grille.

Cas où il est impossible d'obtenir tous les points du plan

Dès les premières séances nous avons vu que, dans certains cas il est impossible d'informer tous les points. C'est le cas lorsque les trois vecteurs sont situés dans un angle inférieur ou égal à 180°, il n'est pas possible de fournir une information en dehors de cet angle.



Nous avons observé que, dans certains cas, les points non informés étaient disposés en lignes horizontales ou verticales. Nous avons trouvé le moyen de le prévoir d'après les règles : si toutes les abscisses ont un diviseur commun certaines lignes verticales ne seront pas informées, si toutes les ordonnées ont un diviseur commun certaines lignes horizontales ne seront pas informées.

Démonstration, pour des règles particulières.

Soient les vecteurs

$\boldsymbol{U}$(+2 ; +3), $\boldsymbol{V}$(+5 ;-6) et $\boldsymbol{W}$(-4 ;+9).

On remarque que leurs ordonnées ont le diviseur commun 3.

Pour obtenir un point de la ligne juste supérieure au point 1, d'ordonnée égale à 1, on devra appliquer *a* fois le vecteur ***U***, *b* fois le vecteur ***V*** et *c* fois le vecteur ***W***.

On obtiendra en considérant les ordonnées l'équation suivante :

$$3a - 6b + 9c = 1$$
$$3(a - 2b + 3c) = 1$$
$$a - 2b + 3c = 1/3$$

or *a*, *b*, *c* étant des nombres entiers il en est de même de $a - 2b + 3c$; donc l'équation n'a pas de solution car 1/3 n'est pas entier.

Une telle équation ne pourra avoir des solutions que si le point cherché a pour ordonnée un multiple de trois. Donc une ligne horizontale sur trois seulement sera informée.