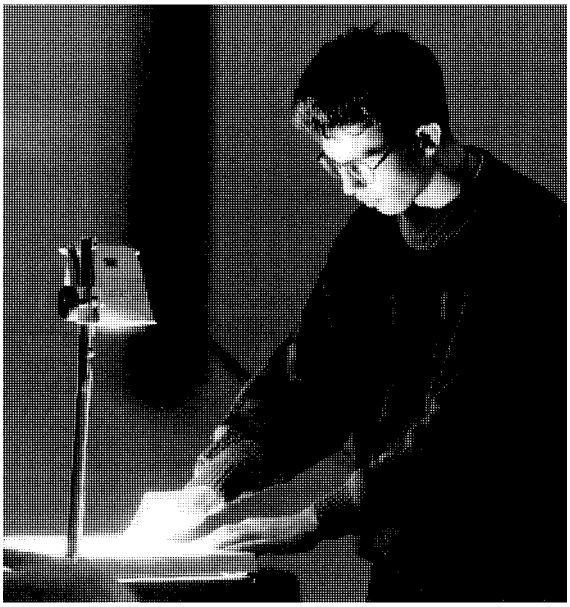
des points fixes

par Antoine Grégoire, Jean-Yves Moyen, Stéphane Cote, des lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon (69)

enseignants : Serge Betton, Marie-Claude Pontille

chercheur : Roland Assous



Du discret au continu, avec tous les problèmes que cela pose : fini et infini, limite d'une suite, ensembles totalement ordonnés, plus grand élément et borne supérieure, continuité, raisonnement par l'absurde et preuve par récurrence, irrationalité des nombres, coupures dans Q ou R.

sujet proposé par le chercheur

On considère une application f de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$, où n est un entier. On suppose f croissante, donc si $i < j$, alors $f(i) \leq f(j)$.

☞ Est-ce qu'il existe un entier k tel que $f(k) = k$? k est appelé point FIXE.

☞ Etudier de possibles généralisations à :
f : de [0, 1] dans [0, 1]

dans les DÉCIMAUX ;
dans les RATIONNELS ;
dans les RÉELS.

Ou toute autre généralisation …

les recherches dans les naturels
(f de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$)

premiers réflexes

Nous avons d'abord testé des fonctions continues (telles que $1/x$, $\sqrt{x}$, etc …) mais nous nous sommes vite aperçus qu'aucune ne satisfaisait entièrement les conditions de l'énoncé (à chaque abscisse naturelle correspond une ordonnée naturelle).

Nous avons ensuite examiné le cas des fonctions affines : $y = a\,x + b$. Après avoir envisagé les différentes possibilités pour a et b, nous avons déduit que seule la fonction affine $y = x$ convient à l'énoncé, ce qui n'offre pas un champ de recherche formidable !

reformulation de l'énoncé

Nous avons jugé utile de clarifier les choses en reformulant l'énoncé du problème :

« Montrer que n'importe quelle fonction f correspondant aux conditions de l'énoncé possède au moins un point fixe. »

En fait, notre fonction n'est pas une fonction “classique” (définie dans R), mais une fonction *discrète* (sa représentation est une succession de points régulièrement espacés).

démonstration dans les naturels

Nous avons utilisé un raisonnement par l'absurde : nous avons réussi à montrer qu'il n'existe pas de fonction f (répondant aux conditions de l'énoncé) qui n'admette aucun point fixe. Ainsi, on montre qu'***il y a toujours au moins un point fixe (dans*** N***)***.

la démonstration est la suivante :

On suppose qu'il existe une fonction croissante f définie de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$, sans point fixe.

D'après l'énoncé, on a : $n \geq f(1) \geq 1$. Or f n'a pas de point fixe donc :

$$n \geq f(1) > 1$$
[NDLR : car $f(1) \geq 1$ et $f(1) \neq 1$]
$$n \geq f(1) \geq 2$$

Puisque f est croissante, on a :

$$n \geq f(2) \geq f(1) \geq 2$$

Or f n'a pas de point fixe, donc :

$$n \geq f(2) > 3$$

Donc, de proche en proche, on a :

$$n \geq f(k) > k + 1$$
pour $k \in \{1, \ldots , (n\text{-}1)\}$

d'où :

$$n \geq f(n\text{-}1) \geq (n\text{-}1) + 1$$

c'est-à-dire :

$$f(n\text{-}1) = n.$$

f est croissante donc $f(n) \geq f(n\text{-}1)$, c'est-à-dire $f(n) \geq n$. Or f n'a pas de point fixe, donc : $f(n) > n$. Donc $f(n) \notin \{1, \ldots , n\}$.

La fonction f ne correspond plus à l'énoncé.
CQFD.

[note de la claviste : cqfd = ce qu'il fallait démontrer]

les recherches dans les décimaux et les rationnels

[Généralisations à
$f : \mathrm{D} \cap [0, 1] \to \mathrm{D} \cap [0, 1]$
et à $f : \mathrm{Q} \cap [0, 1] \to \mathrm{Q} \cap [0, 1]$]

première idée

Nous avons essayé de passer [à D ∩ [0, 1] à partir] de N ∩ [0, n] où nous pouvons montrer qu'il existe toujours au moins un point fixe si f est croissante (démonstration analogue à N ∩ [1, n]), par une division par n.

On aurait donc $g(x/n) = f(x)/\mathrm{n}$.

Comme $x \in$ N ∩ [0, n], nous **pensions** que x/n appartiendrait à D ∩ [0, 1] si n est choisi suffisamment grand (n tend vers $+\infty$).
Comme on a $f(k) = k$, on aurait:

$$g(k/n) = f(k)/n = k/n,$$

donc g aurait un point fixe.

Mais on ne peut pas être sûr que $1/n$, $2/n$, …, ou x/n soit décimal ; par exemple :

$$1/(3\times10^m) \notin \mathrm{D} \text{ avec } m \in \mathrm{N}.$$

Et comme x et x+1 (avec $x \in$ N) sont consécutifs dans N, notre démonstration supposerait que x/n et $(x+1)/n$ soient consécutifs dans D, c'est-à-dire qu'il existerait un « plus petit décimal » [NDLR : sous-entendu … strictement positif]. Or **ce n'est pas le cas** :

Prenons un nombre e décimal, très petit (proche de 0), il existera toujours un nombre décimal e' compris entre 0 et e ($e' < e$), par exemple $e' = e/10$. Donc il n'existe pas de plus petit décimal [strictement positif]. Cela exclut donc de réutiliser la démonstration dans N en écrivant les décimaux : 0, e, $2e$, $3e$, … où e serait le « plus petit décimal ».

En fait, nous nous sommes heurtés à la non-bijectivité de N ∩ [0, n] et [de] D ∩ [0, 1]. [NDLR : C'est le moins qu'on puisse dire, s'agissant d'un ensemble fini et d'un autre infini !].

Finalement, nous avons trouvé un contre-exemple montrant qu'***il n'existe pas [forcément] de point fixe dans*** D ***lorsque f est croissante :***

$$f(x) = 0{,}7\,x + 0{,}2.$$

• 0,7 est décimal donc $0{,}7x$ est décimal puisque x est décimal. De plus, 0,2 est décimal. Donc $f(x)$ est décimal.
• f est croissante car f est affine et $0{,}7 > 0$.
• $f(0) = 0{,}2 \geq 0$ et $f(1) = 0{,}9 \leq 1$

Donc f répond aux conditions de l'énoncé.

Si on résout $f(k) = k$, on trouve $k = 2/3 \notin D$ (solution unique) donc f n'a pas de point fixe.

et dans les rationnels …

De même dans Q, avec la fonction :

$$g(x) = 0{,}5\,x^2 + 0{,}1$$

• comme $x \in Q$, $x^2 \in Q$;
$0{,}5 \in Q$ donc $0{,}5\,x^2 \in Q$;
$0{,}1 \in Q$ donc $g(x) \in Q$.
• g est croissante sur [0, 1] ;
[NDLR : parce que x^2 l'est.]
• enfin : $g(0) = 0{,}1$ et $g(1) = 0{,}6$.

Donc g répond aux conditions de l'énoncé.

Si on résout $g(k) = k$ dans [0, 1], on trouve $k = 1 - 0{,}4\sqrt{5}$ (solution unique dans [0, 1]). Or $\sqrt{5} \notin Q$, donc $k \notin Q$.

[NDLR : trois remarques :
(1) « $\sqrt{5} \notin Q$ …» : on peut démontrer en effet que la racine carré d'un nombre entier qui n'est pas un carré parfait ne peut pas être une fraction, autrement dit est un *nombre irrationnel*. .
(2) «… donc $k \notin Q$.» : il est facile de montrer (par l'absurde) que la multiplication ou l'addition d'un irrationnel avec un rationnel produit un irrationnel.
(3) La fonction g transforme un nombre décimal en un nombre décimal, donc g est aussi un contre exemple à la propriété de point fixe pour les décimaux].

Donc toutes **les fonctions croissantes de** $Q \cap [0, 1]$ **dans** $Q \cap [0, 1]$**, n'ont pas forcément de point fixe**.

les recherches dans les réels

[Généralisations à $f : R \to R$]

[NDLR : l'idée générale est que les points fixes de f vont être les valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative de f rencontre la 1ère bissectrice (droite d'équation $y = x$)]

positions relatives de f(0) et de f(1)

Soit une fonction f et sa courbe représentative Cf, telle que Cf parte « en dessous » de la 1ère bissectrice ($f(x) < x$) :

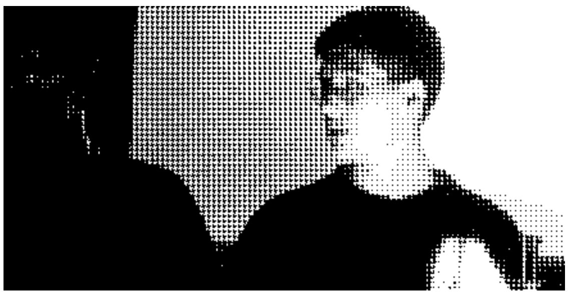
$$\exists\, \alpha \,/\, \forall\, \varepsilon \in [0, \alpha],\ f(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

[NDLR : ceci est une définition de "partir en dessous".]

Or $0 \in [0, \alpha]$, donc $f(0) \leq 0$. Or par définition $f(0) \geq 0$, donc f admettrait un point fixe en (0, 0). [NDLR : au vu de la définition d'un point fixe, c'est 0 qui est point fixe de f, le point de Cf correspondant étant (0, 0).]

Par raisonnement analogue, toute courbe arrivant « au dessus » de la 1ère bissectrice admet un point fixe en (1, 1). A l'avenir [NDLC : l'avenir commence aujourd'hui !], *nous nous intéresserons donc seulement aux fonctions partant « au dessus » de la 1ère bissectrice et arrivant «en dessous ».*

[NDLR : ***ATTENTION !*** il y a ici une affirmation cachée : celle que toute fonction parte « en dessous » ou « au dessus ». Intuitivement, cela est vrai pour des fonctions dont le graphique est "traçable". L'idée de fonction traçable correspond à peu près à la notion mathématique de *fonction continue* et *continûment dérivable par morceaux*.]



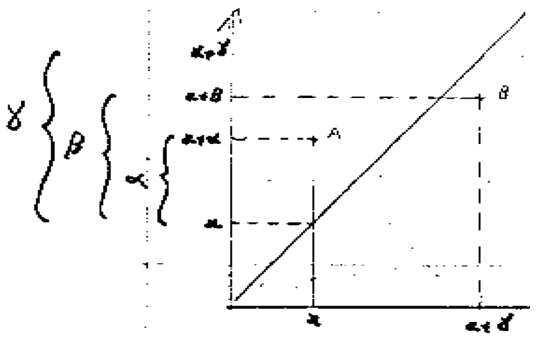
Nous pouvons répartir les différentes valeurs de x dans trois ensembles :

$$A = \{x \,/\, f(x) > x\}$$
$$B = \{x \,/\, f(x) < x\}$$
$$C = \{x \,/\, f(x) = x\}$$

Il s'agirait alors de montrer que $C \neq \emptyset$.

Si $C = \emptyset$, alors $\exists\, x \,/\quad f(x) = x + \alpha > x$
$$f(x + \gamma) = x + \beta < x + \gamma$$

[NDLR : en fait l'hypothèse $C = \emptyset$ n'interviendra que plus loin …]



$A(x\,;\, x + \alpha)$ $\qquad$ $B(x + \gamma\,;\, x + \beta)$

[NDLR : de plus x < x+ g . Donc :
$f(x) = x + \alpha \leq f(x + \gamma) = x + \beta$.]

On a : $x \leq x + \alpha \leq x + \beta \leq x + \gamma$.

La croissance de f et l'hypothèse $C = \emptyset$ amènent à :

$$x + \alpha \leq x + \alpha' \leq x + \beta' \leq x + \beta$$

avec $x + \alpha' = f(x + \alpha)$ et $x + \beta' = f(x + \beta)$.
Donc par itération :

$$x + \alpha' \leq x + \alpha'' \leq x + \beta'' \leq x + \beta'$$
…

Nous définissons ainsi deux suites :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) > U_n \end{cases} \text{ car } Cf \text{ part « au dessus »}$$
$$\begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = f(V_n) < V_n \end{cases} \text{ et arrive « en dessous »}$$

Si les deux suites convergeaient vers une même limite l, alors on aurait $f(l) = l$.

[NDLR: ce n'est nullement évident, mais peut être prouvé soit si la fonction f est continue soit en utilisant à la fois la définition d'une limite et la croissance de la fonction f.]

Mais les deux suites peuvent ne pas converger vers une même limite si f ne comporte pas qu'**un seul** point fixe[**apparent**]. Nous avons donc abandonné cette piste.

[NDLR : en fait si f n'est pas continue, même si f n'admet *apparemment* qu'un seul point fixe (c'est-à-dire s'il n'existe qu'un seul endroit où le graphe de f traverse la 1ère bissectrice, les éléments de A étant à gauche et les éléments de B à droite) les suites considérées plus haut peuvent ne pas converger vers une limite commune. Dans ce cas, les limites des suites peuvent ne pas être des points fixes.]

Nous avons ensuite examiné le cas où A $=\{x/\, f(x) > x\}$ ***avait un plus grand élément.***

Si A a un plus grand élément, noté G, alors :

$$\forall\, x \in A,\, x \leq G < f(G)$$

Soit $G' = f(G)$; donc $G < G'$; comme f est croissante $f(G) \leq f(G')$: $G' \leq f(G')$.

Si $f(G') > G'$, alors $G' \in A$, donc $G' > G$ [ce qui est impossible puisque G est le plus grand élément de A.]. Donc $f(G')$ **n'est pas** strictement supérieur à G', donc $f(G') = G'$, donc

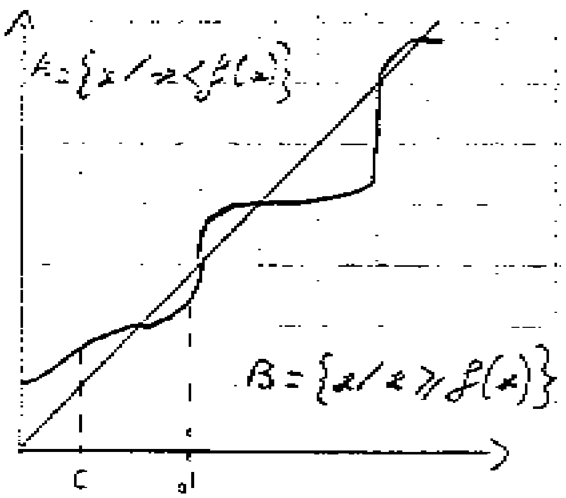
***G'* est point fixe**.

De manière analogue, si $B = \{x \,/\, f(x) < x\}$ possède un plus petit élément p, alors p est point fixe.

[NDLR : attention, c'est $p' = f(p)$ et non p qui est un point fixe, si on se réfère à ce qui est prouvé au dessus pour G. Il est remarquable de voir que cette preuve établit l'existence d'un point fixe dans le cas des ensembles finis, c'est à dire pour les fonction croissantes de $\{1, …, n\}$ dans $\{1, …, n\}$. En fait, pour les nombres réels, on peut considérer un nombre

H tel que $G < H < G'$ et on aboutit à une contradiction : $f(G) \leq f(H) \leq f(G') = G' = \mathrm{f}(G)$ d'où $\mathrm{f}(H) = G' > H$; donc $H \in A$. On peut en conclure que ***l'ensemble A n'a pas de plus grand élément***. Comparer avec ce qui suit :]

Plaçons-nous sur un intervalle $[c, d]$ tel que *Cf* **ne semble couper** $y = x$ qu'une fois sur $[c, d]$.



On a alors [toujours avec l'hypothèse C = ∅] :

$$\forall\, x \in A, \forall\, x' \in B, x < x'$$
$$A \cup B = [c, d]$$

Donc il existe un point e « de jonction » entre A et B. Donc :

• soit $A = [c, e]$, $B =]e, d] \rightarrow A$ possède un plus grand élément, point fixe ;

• soit $A = [c, e[$, $B = [e, d] \rightarrow B$ possède un plus petit élément, point fixe.

[NDLR : ***ATTENTION***, nous voici probablement au cœur du problème ! L'existence d'un "point de jonction", c'est à dire d'un nombre J tel que $a \leq J$ pour $a \in A$ et $J \leq b$ pour tout $b \in B$n'est nullement facile à prouver, car elle met nécessairement en jeu la notion même de nombre réel (la propriété est fausse dans Q). On retrouve ici l'approche de R développée par Dedekind avecles *coupures*.]

Donc il y a un point fixe pour toutes les fonctions où l'on peut l'isoler, c'est-à-dire que nous ne pouvons démontrer de cette façon qu'une courbe possédant [apparemment] une infinité de points fixes (exemple : $y = x$) en possède au moins un …

[NDLR : le paradoxe n'est qu'apparent ; soit on peut isoler un point fixe *apparent*, soit on ne peut pas ; et si on ne peut pas, c'est qu'il y a trop de points fixes (*apparents*) et on est ramenés à … démontrer qu'il y a au moins un point fixe… La véritable question consiste finalement à prouver qu'une intervalle qui contient apparemment un point fixe en combien véritablement un].

étude statistique [pour {1,…n}]

Ayant démontré qu'il existait un point fixe dans les naturels, nous sommes demandés où se trouvait ce point fixe : pour $1 \leq x \leq n$, quel est le pourcentage de chances que x soit point fixe ?

Afin de représenter rapidement toutes les fonctions répondant aux conditions de l'énoncé, nous utiliserons des arbres dont voici la méthode de tracé : [NDLR : voir aussi l'article consacré aux *arbres*, page 97.]

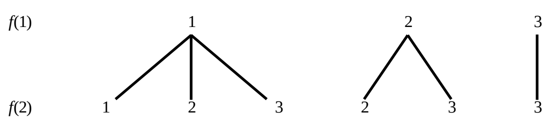
Posons $n = 3$.

$f(1)$ peut être égal à 1, 2 ou 3. On a donc :

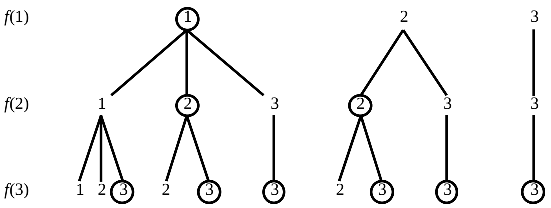
$f(1)$ 1 2 3

Ensuite :

• si $f(1) = 1$
alors $f(2)$ peut être égal à 1, 2 ou 3 ;
• si $f(1) = 2$ (et f croissante)
alors $f(2)$ peut être égal à 2 ou 3 ;
• si $f(1) = 3$ (et f croissante)
alors $f(2) = 3$.
On a donc :

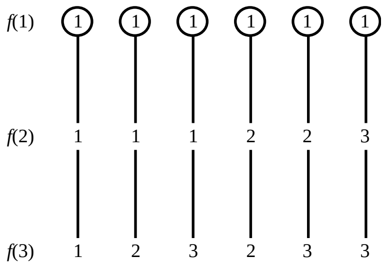


De la même manière, grâce à la croissance de la fonction, on obtient l'arbre complet :



(Les nombres encerclés sont les points fixes : $f(1) = 1$ ou $f(2) = 2$ ou $f(3) = 3$.)

On constate donc que 1 est point fixe pour 6 fonctions :



De même, 2 est point fixe pour 4 fonctions, et 3 est point fixe pour 6 fonctions. On notera :

$$\left.\begin{array}{l} P_3(1) = 6 \\ P_3(2) = 4 \\ P_3(3) = 6 \end{array}\right\}$$

$P_n(x)$ est le nombre de fonctions croissantes de $\{1, \dots , n\}$ dans $\{1, \dots , n\}$ admettant x comme point fixe.

On utilisera aussi la notation $N_n(x)$ qui représente le nombre de fonctions croissantes existant de $\{1, \dots , x\}$ dans $\{1, \dots , n\}$.

(N est l'abréviation de "Niveau" car $N_n(x)$ est aussi le "Niveau" de l'arbre, c'est-à-dire le nombre de chiffres sur la ligne $f(x)$, aussi appelée *niveau* x).

On a donc :

$$N_3(1) = 3$$
$$N_3(2) = 6$$
$$N_3(3) = 10$$

On trouve donc (en traçant les arbres) :

$$P_1(1) = 1 \xrightarrow{\times 2} P_2(1) = 2 \xrightarrow{\times 3} P_3(1) = 6 \xrightarrow{\times 10/3} P_4(1) = 20$$
$$P_2(2) = 2 \xrightarrow{\times 2} P_3(2) = 4 \xrightarrow{\times 3} P_4(2) = 12$$
$$P_3(3) = 6 \xrightarrow{\times 2} P_4(3) = 12$$
$$P_4(4) = 20$$

$$\xrightarrow{\times 3,5} P_5(1) = 70 \xrightarrow{\times 3,6} P_6(1) = 252$$
$$\xrightarrow{\times 10/3} P_5(2) = 40 \xrightarrow{\times 3,5} P_6(2) = 140$$
$$\xrightarrow{\times 3} P_5(3) = 36 \xrightarrow{\times 10/3} P_6(3) = 120$$
$$\xrightarrow{\times 2} P_5(4) = 40 \xrightarrow{\times 3} P_6(4) = 120$$
$$P_5(5) = 70 \xrightarrow{\times 2} P_6(5) = 140$$
$$P_6(6) = 252$$

Outre la symétrie des nombres

$$(P_n(1) = P_n(n), \dots)$$

on observe la régularité des coefficients des multiplications.

Soit U_n la liste des coefficients

$$(U_1 = 2,\ U_2 = 3,\ U_3 = 10/3, \dots).$$

On a donc :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \times U_{n-x}$$

Soit k_n la différence $U_{n+1} - U_n$. On observe que :

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$$
$$k_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{1+2+3}$$
$$k_4 = \frac{1}{10} = \frac{1}{1+2+3+4}$$

d'où la **conjecture** :

$$k_n = \frac{1}{\sum_{b=1}^{b=n} b}$$

Soit :

$$k_n = \frac{2}{n\,(n+1)}$$

d'où :

$$U_{n+1} = U_n + k_n$$
$$U_{n+1} = U_n + \frac{2}{n\,(n+1)}$$

autrement dit :

$$U_n = U_{n-1} + \frac{2}{n\,(n-1)}$$

On a donc la suite (U_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{2}{n\,(n-1)} \end{cases}$$

$\forall n > 1$, on a : $U_n = U_{n-1} + 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

donc $\forall n$, $U_{n+1} = U_n + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$U_{n+1} + \frac{2}{n+1} = U_n + \frac{2}{n} = U_1 + \frac{2}{1} = 4$$

On a donc la formule explicite :

$$\boxed{U_n = 4 - \frac{2}{n}}$$

On conjecture : symétrie dans le nombre de fonctions ayant un point fixe :

$$P_n(x) = P_n(n - (x\text{-}1))$$

[NDLR : la poursuite des calculs utilise cette conjecture et la précédente ; $k!$ désignera la factorielle de l'entier k.]

Plus particulièrement $P_n(n) = P_n(1)$.

La suite des coefficients est définie par :

$$U_n = 4 - \frac{2}{n}$$
$$P_1(1) \times U_1 = P_2(1)$$
$$P_n(1) \times U_n = P_{n+1}(1) \ldots$$
$$P_2(2) \times U_1 = P_3(2)$$
$$P_n(2) \times U_{n-1} = P_{n+1}(2) \ldots$$

Plus généralement :

$$P_n(x) \times U_{n-x+1} = P_{n+1}(x)$$
$$P_{n-1}(x) \times U_{n-x} = P_n(x)$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \times U_{n-x}$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \times \left(4 - \frac{2}{n-x}\right)$$

D'où la relation de récurrence :

$$\boxed{\begin{cases} P_1(1) = 1 \\ P_n(1) = P_{n-1}(1) \times \left(4 - \dfrac{2}{n-1}\right) \end{cases}}$$

On peut donc calculer $P_n(1)$.

Or $P_n(1) = P_n(n)$, on a donc une nouvelle relation de récurrence :

$$\boxed{\begin{cases} P_n(n) = P_n(1) \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) \times \left(4 - \dfrac{2}{n-x}\right) \end{cases}}$$

On constate également que :

$$N_n(x) = N_n(x\text{-}1) \times \left(\frac{n+x-1}{x}\right)$$

Comme on connaît $N_n(1)$, on peut déterminer $N_n(x)$ par récurrence :

$$\boxed{\begin{cases} N_n(1) = n \\ N_n(x) = N_n(x\text{-}1) \times \left(\dfrac{n+x-1}{x}\right) \end{cases}}$$

… d'où les formules explicites :

$$\boxed{N_n(x) = \frac{(n+x-1)\,!}{x\,!\,(n-1)!}}$$

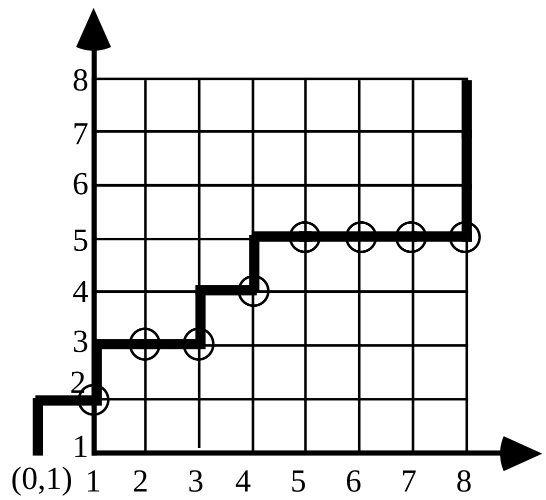
Plus particulièrement :

$$\boxed{N_n(n) = \frac{(2\,n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)!}}$$

[NDLR : face à une formule aussi simple, puisque on retrouve ici le coefficient binomial exprimant le nombre de combinaisons de n éléments pris parmi $2n - 1$ éléments (ou, ce qui revient au même le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à $2n - 1$ éléments, on pourrait être tenté de démontrer cette formule directement, en s'affranchissant des conjectures faites précédemment (ce qui permettrait également de prouver ces conjectures !).

On peut obtenir une telle preuve en représentant la fonction par un escalier : chaque point $(x, f(x))$ de la fonction est l'extrémité droite d'un segment horizontal **H** de longueur 1.

On complète l'escalier par des segments verticaux, jusqu'au point (0, 1), ajouté au graphique, de manière à avoir pour chaque fonction croissante un escalier qui relie le point (0, 1) au point (n, n).



fonction croissante de {1, …,8} dans {1, …,8} de valeurs successives 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5.

A chaque escalier correspond une succession de $2n - 1$ segments dont précisément n sont horizontaux et $n - 1$ sont verticaux.

Le nombres d'escaliers est donc égal au nombre de manières de choisir n éléments parmi $2n - 1$.]

$$\boxed{\cancel{P_n(x) = \frac{(2x-2)!}{[(x-1)!]^2} \times \frac{(2n-2x)!}{[(n-x)!]^2}}}$$

[NDLR : cette formule est fausse, en fait :

$$P_n(x) = \frac{(2x\text{-}3)!\ (2n\text{-}2x\text{-}3)!}{(x\text{-}1)!(x\text{-}2)!\ (n\text{-}x\text{-}1)!\ (n\text{-}x\text{-}2)!}$$

Cela retentit sur la suite des calculs …]

On peut ainsi trouver directement le pourcentage de chances que x soit point fixe :

$$\%n(x) = \frac{P_n(x)}{N_n(n)}$$

(il faut multiplier par 100 pour avoir un pourcentage …)

$$\boxed{\cancel{\%n(x) = \frac{(2x-2)!}{[(x-1)!]^2} \times \frac{(2n-2x)!}{[(n-x)!]^2} \times \frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}}}$$

Nous avons démontré, en utilisant le fait que %n(x) = %n(n-(x-1)), que :

$$\boxed{\cancel{\lim_{n \to +\infty} \%n(x) = \frac{P_x(x)}{2^{(2x-1)}}}}$$

[NDLR : Le concept de fonction représente pour les jeunes une difficulté majeure dans la compréhension des situations mathématiques et il n'est pas facile de proposer un sujet de recherche sur ce thème (voir aussi le travail sur *les fonctions* au lycée Val de Seine).

Les cadres dans lesquels apparaissent les fonctions au niveau scolaire étant très fortement numériques, c'est par le calcul que seront "naturellement" approchés les propriétés des fonctions. Le calcul devient ainsi un refuge pour l'élève, au sens où il est une activité moins coûteuse qu'une réflexion mettant en jeu des doutes, des intuitions, des paradoxes, des représentations nouvelles.

Il est sans doute très symptomatique que le recours à l'intuition soit en définitive proscrit lorsque le cadre de traitement du sujet est délimité par de fortes contraintes, la modélisation du problème n'étant plus alors à la charge de ceux qui cherchent.]