# IFS (2) distance de Hausdorff et application dans les IFS

par Armindo de Oliveira (TC), Hong Sok Aï et Karima Ghellam (1°S), APTIC “Exploration Mathématique” du lycée Louise Michel de Bobigny (93)

enseignant : François Gaudel

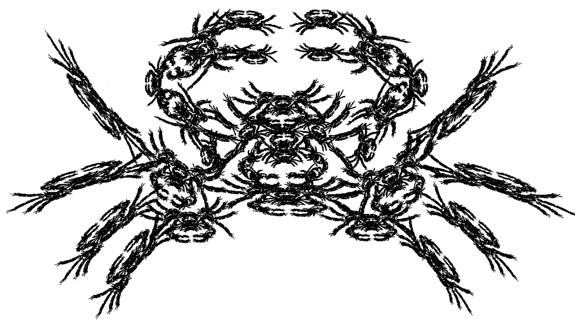
rappel :

IFS signifie *Iterated Function Systems*, c’est-à-dire : systèmes de fonctions itérées. C’est une méthode pratique de réalisation d’images fractales, qui permet également la compression d’images quelconques. Dans la première partie (**Présentation générale**, page 83), nous en expliquions le principe et l’intérêt.

Ce second exposé permettra de comprendre les propriétés et surtout l’existence des IFS grâce à l’introduction d’une distance appelée distance de Hausdorff, et du théorème du point fixe ; le théorème du collage nous donne alors une méthode pour fabriquer des images à partir de modèles.

Enfin dans le troisième exposé (**Génération aléatoire des IFS**, page 93) nous expliquerons comment nous avons utilisé la notion de dimension fractale pour améliorer la qualité de nos œuvres.

Cet exposé va nous permettre de comprendre la théorie mathématique qui explique l’existence des IFS.



***Notion de distance entre 2 figures***

La définition classique d’une distance telle que nous la connaissons (entre 2 points par exemple, ou entre un point et une droite, etc.) est la longueur minimale des chemins possibles d’un point à un autre. Mais qu’en est-il entre deux images ou figures ?

On voudrait un nombre appelé distance de ces images ou figures et qui soit grand si elles sont très différentes et petit si elles se ressemblent beaucoup. Et en étant nul s’il s’agit de mêmes figures.

Félix Hausdorff, mathématicien allemand du début de ce siècle a mis au point une telle distance, appelée distance de Hausdorff. Nous allons voir comment elle s’obtient et si cette distance entre deux figures peut être comparable à une distance classique.

Avant tout, il faut définir ce qu’on appelle une figure :

• Une figure doit être bornée : on peut la mettre dans un disque.

• Elle doit être fermée, c’est-à-dire que si un point se trouve à une distance nulle de la figure, il est dans la figure (dans un disque ouvert les points sur la frontière ont une distance nulle avec la figure mais ne sont pas dans la figure).

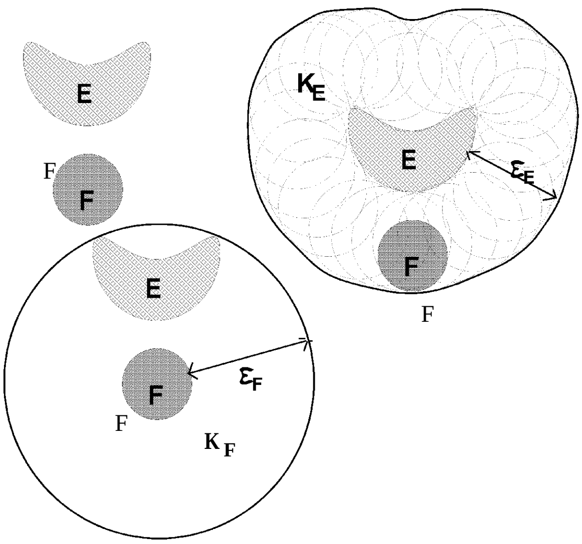
Quand une figure a ces deux propriétés, il s'agit d'un compact et les IFS que nous utilisons sont des compacts ; la distance de Hausdorff est définie sur des ensembles compacts du plan.

**• Mais voyons cette distance :**

Soient deux compacts $F$ et $E$ quelconques.

Tout d'abord, on enferme le compact $F$ dans un enclos de valeur ε, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points situés à une distance (usuelle) de $F$ inférieure à ε.

[A noter que la distance (usuelle) de $M$ à $F$ est la plus petite distance $d(M, M')$ où $M' \in F$). On peut faire de même pour $E$.]




On définit pour $F$ la plus petite distance $\varepsilon_F$ telle que si on appelle $K_F$ l'enclos des points situés à moins de $\varepsilon_F$ de $F$, on ait $E \subset K_F$. $K_F$ est en fait le plus petit enclos possible de $F$ qui contienne $E$. On agit de la même manière avec le compact $E$ : $K_E$ est le plus petit enclos de $E$ qui contienne $F$. Cela nous définit le nombre $\varepsilon_E$.

Par définition, la distance de Hausdorff de $F$ et $E$ est le plus grand des 2 nombres $\varepsilon_F$ et $\varepsilon_E$. On définit ainsi :

$$d_{\text{Hausdorff}}(F, E) = \sup(\varepsilon_F, \varepsilon_E)$$

**• Voyons à présent quelles sont les propriétés de cette distance de Hausdorff :**

Classiquement les propriétés des distances sont :

a) $d(A, B) = d(B, A)$
b) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
c) Inégalité triangulaire :
$$d(B, C) \leq d(A, B) + d(A, C)$$

a) Exemple : prenons 2 points $A$ et $B$.
[NDLR : pourquoi pas 2 compacts ?]
On a évidemment $\varepsilon_A = \varepsilon_B = AB$. La distance de Hausdorff de 2 points est la distance usuelle donc $d(A, B) = d(B, A)$.

b) Supposons le compact $A$ = le compact $B$.

Pour $\varepsilon_A = 0$, $B$ est inclus dans $K_A$ ; et pour $\varepsilon_B = 0$, $A$ est inclus dans $K_B$.

Conclusion : $d(A, B) = 0$.

*Réciproquement :*

Supposons $d(A, B) = 0$. Montrons que $A = B$. Pour cela, on va montrer que si $A \neq B$, leur distance n'est pas nulle, $A$ et $B$ étant fermés.

Soit il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$ ; soit il existe $x \in B$ tel que $x \notin A$. On suppose qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$.

$x$ est donc à une certaine distance $\neq 0$ de $B$.

La distance $\varepsilon_B$ doit au moins être égale à cette distance, donc $\varepsilon_B \neq 0$ donc $d(A, B) \neq 0$.

La réciproque est donc vraie pour des figures fermées.

On en conclut que :

la distance de Hausdorff de 2 figures n'est nulle que si les 2 figures sont strictement égales et superposées.

c) On *admettra* que l'inégalité triangulaire s'applique aussi à la distance de Hausdorff.

Mais amusons-nous à trouver la distance de Hausdorff entre un *disque B de rayon R et un point A situé à la distance D du centre :*

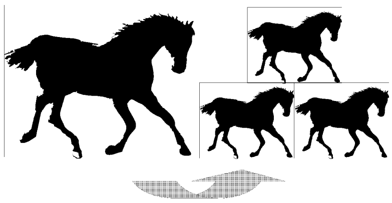
Distance : $\varepsilon_A = D + R$ , alors que $\varepsilon_B < D$, donc $d_H(A, B) = D + R$.

Remarque : Si le point *A* est à l'intérieur du disque, la distance n'est pas nulle, ce qui est normal, les deux figures étant distinctes.

***Applications contractantes***

Une application est contractante si elle diminue la distance de 2 objets dans un rapport positif toujours inférieur à un nombre $k < 1$. Nos applications affines et nos opérateurs de Hutchinson sont contractants car ils diminuent de cette façon la distance de Hausdorff de 2 figures compactes du plan

Reprenons l'exemple simple des trois homothéties de rapports 1/2. Soit *T* l'opérateur de Hutchinson.



Il existe un nombre *k* (ici 1/2) : $0 < k < 1$ tel que pour toutes les figures *E* et *F* du plan, on a :

$E \rightarrow E' = \mathrm{T}(E)$

$F \rightarrow F' = \mathrm{T}(F)$

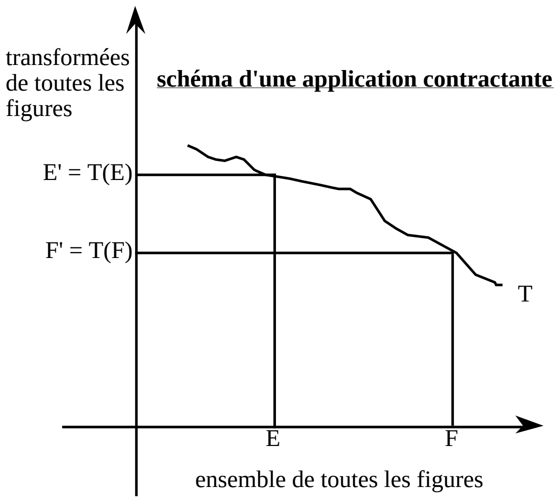
et $d(E', F') \leq k \times d(E, F)$, où $d(E, F)$ est la distance de Hausdorff de *E* et *F*.

En effet, chacune des homothéties multiplie les distances usuelles par 1/2, donc si *M* est à la distance usuelle $\delta$ de *F*, les trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$, ses images par les homothéties qui constituent *T*, seront à des distances $\delta/2$ de $F_1$, $F_2$, $F_3$, images de *F* par ces trois homothéties, et donc à une distance encore inférieure de *F*' tout entier. On en déduit l'inégalité précédente en revenant à la définition de la distance de Hausdorff.

Plus généralement, il est immédiat qu'une homothétie de rapport positif *k* multiplie les distances de Hausdorff par *k*.

A une application affine, nous demanderons de transformer un triangle *ABC* en un triangle *A'B'C'* de telle façon que l'on ait à la fois : $A'B' < AB$, $B'C' < BC$ et $A'C' < AC$, et nous admettrons que cela suffit.

Nous allons représenter les applications contractantes à l'aide du schéma suivant où les distances sont représentées sur les axes :




*T* est bien une application contractante car $d(E', F') \leq 2/3 \times d(E, F)$ quelles que soient les figures *E* et *F*. En effet dans cet exemple, on a une pente de la courbe comprise entre –2/3 et 0, inférieure ou égale à 2/3 en valeur absolue.

[NDLC : page suivante, le théorème du point fixe et le théorème du collage.]

[NDLR : à propos de point fixe, voir aussi l'article “des points fixes”, page 75.]

**• *Théorème du point fixe***

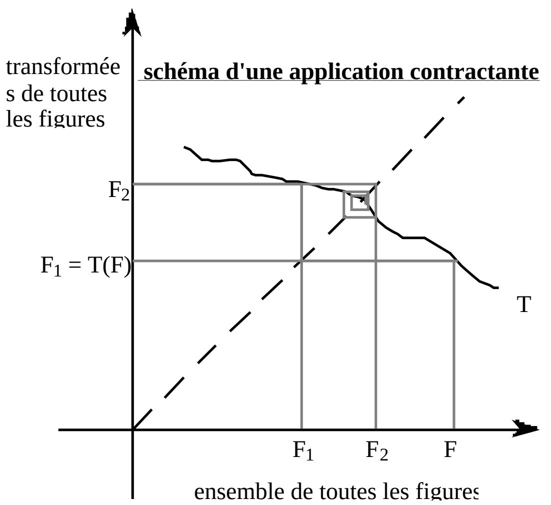
Ce théorème permet de comprendre pourquoi la suite des figures transformées par $T$ converge :

***Théorème :*** Si $T$ est une application contractante dans un espace muni d'une distance et si $F$ est un élément quelconque de cet espace, alors la suite :

$$
\begin{aligned}
&F_1 = T(F)\\
&F_2 = T(F_1)\\
&\ldots\\
&F_{n+1} = T(F_n)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

tend vers une limite $F_\infty$ qui vérifie $F_\infty = T(F_\infty)$ et qui est le seul élément de l'espace à vérifier cette propriété.

Un petit dessin va nous aider à comprendre le théorème du point fixe.




On suppose que $T$ effectue une contraction de rapport 2/3 et $F$ est une figure ; admettons l'existence de $F_\infty$ ; on a alors $T(F_\infty) = F_\infty$ d'où $T^n(F_\infty) = F_\infty$.

Il en résulte : $d(F_n, F_\infty) \leq (2/3)^n \times d(F, F_\infty)$.

Au bout de 25 étapes, les distances ont été multipliées par moins de $4.10^{-5}$, donc $F$ et $F_\infty$ deviennent pratiquement indiscernables.

**• *Théorème du collage***

Nous avons maintenant tous les éléments pour comprendre le théorème du collage :

Soit $F$ une figure, $F_1$ un collage de cette figure. Supposons que $d(F, F_1)$ soit plus petite que $\varepsilon$ et que $T$ soit contractante de rapport $k$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$
\begin{aligned}
d(F, F_n) \leq\ & d(F, F_1) + d(F_1, F_2)\\
& + d(F_2, F_3) + \ldots + d(F_{n-1}, F_n)
\end{aligned}
$$

$$d(F, F_n) \leq d(F, F_1) \times (1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1})$$

Or :

$1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} = \dfrac{1 - k^n}{1 - k}$, qui tend vers $\dfrac{1}{1 - k}$ quand $n$ tend vers l'infini.

Finalement : $d(F, F_\infty) \leq d(F, F_1) \times \dfrac{1}{1 - k}$

Ainsi, la distance de Hausdorff de la figure initiale à la figure finale peut être rendue aussi petite qu'on le désire : il suffit, $k$ étant connu ou majoré, de réaliser un collage $F_1$ dont la distance à $F$, $d(F, F_1)$ est assez petite.

Ainsi s'explique qu'on puisse approcher n'importe quelle figure du plan par un IFS.