équation de Pell-Fermat

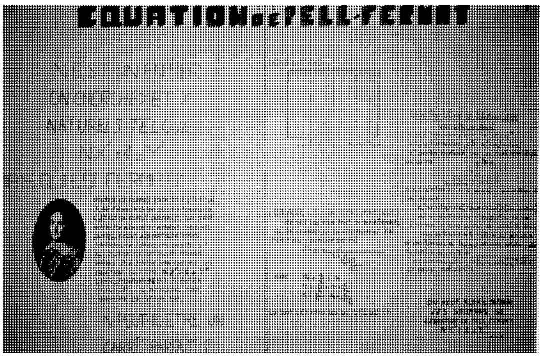
par Samira Amrane (TC), Cécile Deconninck (2nde), Sandrine Lavieux (TC), Irène Mikolaczyk (TC), Karim Ouardini (TC), Sylvain Packan (TC), Stéphanie Perez (2nde), Morgan Queguiner (TC), Hu Liu (TC) du lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)

enseignante : Joëlle Richard

chercheur : Michèle Vergne

Compte-rendu de l'exposé par les parrains du groupe : **lycée J. Jaurès**

Les élèves ont trouvé beaucoup de choses (qui m'ont dépassé). Bien exposé.



Pourquoi avoir choisi ce thème *Equation de Pell-Fermat* ? En 93, l'actualisation du théorème de Fermat a suscité notre intérêt, et d'autre part, nous avions envie de travailler sur des nombres.

Quel est ici le problème posé ?

Il s'agit de trouver X et Y entiers solutions de l'équation :

$$N X^2 \pm 1 = Y^2$$

où N est un entier donné.

Un document ancien rapporte une solution à ce problème, donnée par Brahmagupta en 628. Ce mathématicien indien s'est attaqué d'abord aux équations du type

$$N x^2 + k = y^2$$

et a donné une manière d'obtenir des solutions à partir d'un couple de solutions connu.

Fermat s'intéresse lui-même à la résolution d'équations de ce type ; en particulier, il propose à ses contemporains la résolution de :

$$61 x^2 + 1 = y^2$$

Le problème sera repris en 1767 par Lagrange, qui utilisera pour résoudre cette équation, la théorie des fractions continues.

Plus modestement — et pour cause ! — quelle a été notre attitude devant ce problème ?

Prenons l'équation $N x^2 + 1 = y^2$. ***N peut-il être un carré parfait ?***

Si N est un carré parfait, on peut poser

$$N = m^2 \ (m \text{ entier} > 0)$$

L'équation devient

$$m^2 x^2 + 1 = y^2,$$

pour laquelle on cherche bien sûr des solutions avec $x \neq 0$.

On a donc :

$$(m\,x)^2 + 1 = y^2,$$
$$m, x, y \text{ entiers}$$
$$m > 0, x > 0, y > 0$$

D'où :

$$1 = (y - m\,x)(y + m\,x)$$

Or m, x, y étant des entiers > 0, ceci n'est possible que si

$$y - m\,x = 1$$
$$y + m\,x = 1$$

soit : $x = 0$ et $y = 1$: donc N ne peut être un carré parfait si on veut $x \neq 0$.

expériences sur ordinateur

Nous avons ensuite eu recours à l'ordinateur. On se donne x compris entre 0 et 3000 et N compris entre 0 et 200 [*voir encadré pour le programme*]. On obtient des valeurs de x et y entiers telles que le couple (x, y) soit solution. L'examen de cette liste a permis de chercher des relations entre les différentes solutions.

Brahmagupta, le retour

Nous présentons ici une étude qui permet de montrer, un peu comme l'avait fait Brahmagupta, comment on peut obtenir des solutions à partir d'un couple de solutions connu.

Tentative de résolution pour N = 2.

L'équation s'écrit alors

$$2\,x^2 + 1 = y^2.$$

[Notez qu'il y a la solution $x = 2$, $y = 3$.]

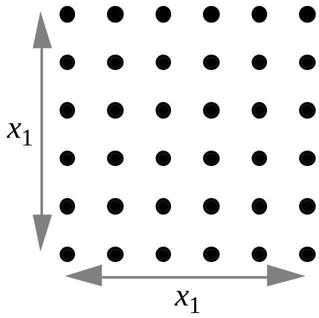
Si (x_1, y_1) est un couple solution :

$$2\,x_1^2 + 1 = y_1^2,$$

soit :

$$x_1^2 + (x_1^2 + 1) = y_1^2.$$

x_1^2 peut être représenté par un carré constitué de points :



Soit un carré de côté x_1.

On veut augmenter le côté du carré initial de manière à obtenir un nouveau carré de côté y_1 :

$x_1 + m$ le nouveau côté du carré (m entier naturel) ; le nombre de points ajouté au carré initial sera :

$$(x_1 + m)^2 - x_1^2 \quad \text{soit :} \quad 2\,m\,x_1 + m^2$$

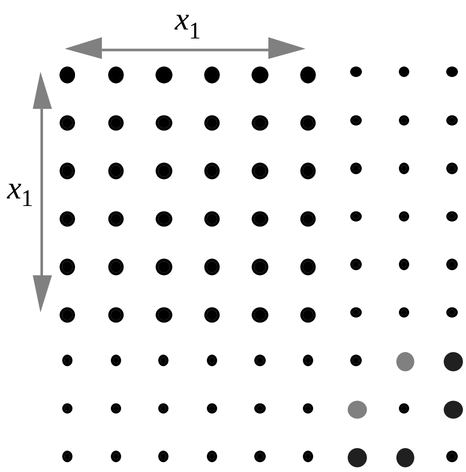
$x_1^2 + x_1^2 + 1$ sera un carré parfait si

$$2\,m\,x_1 + m^2 = x_1^2 + 1$$

ce qui équivaut à :

$$x_1^2 - 2\,m\,x_1 + 1 - m^2 = 0 \qquad (1)$$

interprétation géométrique :



m est le nombre de tours fait autour du carré initial. Au premier tour, on ajoute $2\,x_1+1$, puis au deuxième tour $2\,x_1+1 + 2 \times 1$, puis au troisième tour $2\,x_1+1 + 2 \times 2$, etc … Donc le nombre de points ajoutés peut s'écrire :

$$(2x_1+1) + (2x_1+1 + 2\times1) + ((2x_1+1) + 2\times2) + \ldots$$

soit :

$$(2x_1+1)\, m + 2\,(1 + 2 + \ldots + m\text{-}1)$$

$$(2x_1+1)\, m + m\,(m - 1)$$

On retrouve bien $2\, m\, x_1 + m^2$.

Résolvons l'équation (1) :

$$x_1^{\,2} - 2\, m\, x_1 + 1 - m^2 = 0$$

Si les racines existent

$$x_1 = m + \sqrt{2\, m^2 - 1} \text{ ou } x_1 = m - \sqrt{2\, m^2 - 1}$$

Or $x_1 \in$ Z, $m \in$ Z, $\sqrt{2\, m^2 - 1} \in$ Z.

On note : $\sqrt{2\, m^2 - 1} = M$.

Donc :

$$2\, x_1^{\,2} + 1 = y_1^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = m + \sqrt{2\, m^2 - 1} \text{ ou } x_1 = m - \sqrt{2\, m^2 - 1} \\ 2\, m^2 - 1 = M^2 \end{cases}$$

Or $m = y_1 - x_1$ et $M = x_1 - m$, soit :

$$m = y_1 - x_1 \text{ et } M = 2\, x_1 - y_1\ ;$$

avec $2\, m^2 - 1 = M^2$:

$$2\, (y_1 - x_1)^2 - 1 = (2\, x_1 - y_1)^2$$

Etudions maintenant l'équation :

$$2\, m^2 - 1 = M^2$$

$$2\, m^2 - 1 = M^2 \Leftrightarrow m^2 + m^2 - 1 = M^2.$$

En utilisant l'interprétation géométrique précédente, ceci est possible si et seulement si :

m^2-1=[2m+1]+[(2m+1)+2×1]+[(2m+1)+2×2]+…

soit :

$$m^2 - 1 = (2\, m + 1)\, a + a\, (a - 1),\ a \in \text{N}$$

soit :

$$m^2 - 2\, a\, m - (1 + a^2) = 0$$

$$m = a + \sqrt{2\, a^2 + 1} \text{ ou } m = a - \sqrt{2\, a^2 + 1}$$

Or $m \in$ Z, $a \in$ Z, $\sqrt{2\, a^2 + 1} \in$ Z.

On note : $\sqrt{2\, a^2 + 1} = A$.

Donc :

$$2\, m^2 - 1 = M^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = a + \sqrt{2\, a^2 + 1} \text{ ou } m = a - \sqrt{2\, a^2 + 1} \\ 2\, a^2 + 1 = A^2 \end{cases}$$

Si on remplace a par x_0, A par y_0, x_0 et y_0 sont solutions d'une équation du type

$$2\, X^2 + 1 = Y^2.$$

On a alors :

$$2\, m^2 - 1 = M^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = x_0 + \sqrt{2\, x_0^2 + 1} \text{ ou } m = x_0 - \sqrt{2\, x_0^2 + 1} \\ 2\, x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = x_0 + y_0 \text{ ou } m = x_0 - y_0 \\ 2\, x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

Or on a déjà :

$$2x_1^{\,2} + 1 = y_1^{\,2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + M \text{ ou } x_1 = m - M \\ 2\, m^2 - 1 = M^2 \end{cases}$$

Donc :

$$2x_1^2 + 1 = y_1^2$$

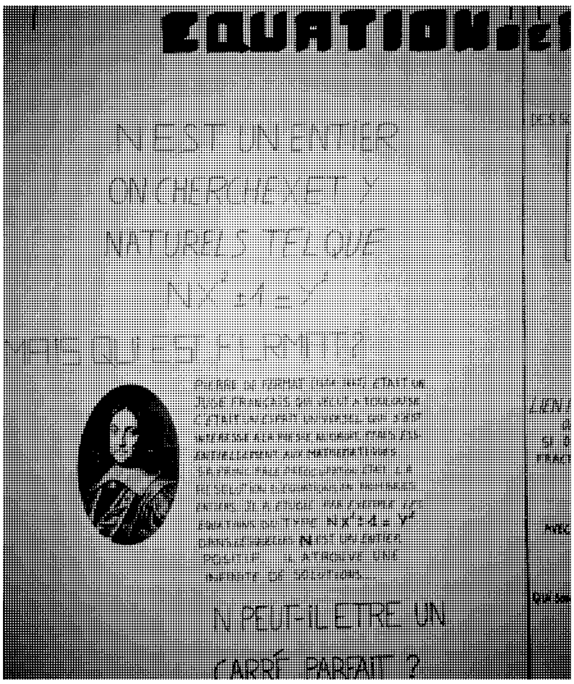
$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = m + M \text{ ou } x_1 = m - M \\ m = x_0 + y_0 \text{ ou } m = x_0 - y_0 \\ \text{et} \\ 2\,x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

Si on connaît un couple solution (x_0, y_0), on en déduit donc un autre (x_1, y_1) ; on peut écrire les formules correspondantes en fonction de (x_0, y_0), car $m = x_0 + y_0$ et $M = 2\,x_0 + y_0$:

$$\begin{cases} x_1 = 3\,x_0 + 2\,y_0 \\ y_1 = 3\,y_0 + 4\,x_0 \end{cases}$$

[NDLR : on peut vérifier algébriquement ces relations, mais c'est très joli de l'avoir trouvé par les racines de l'équation du second degré.]



Tentative de résolution pour N = 3.

L'équation à résoudre est maintenant :

$$3\,x^2 + 1 = y^2.$$

[Notez qu'il y a la solution $x = 1$, $y = 2$.] Soit (x_1, y_1) solution de cette équation :

$$3\,x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (2\,x_1^2) - x_1^2 + 1 = y_1^2$$

$$\Leftrightarrow (2\,x_1^2) - (x_1^2 - 1) = y_1^2$$

Pour une raison analogue à [celle évoquée dans] l'étude du cas $N = 2$:

$x_1^2 - 1$
$= (4x_1\text{-}1) + [(4x_1\text{-}1)\text{-}2\times 1] + [(4x_1\text{-}1)\text{-}2\times 2] + \ldots$
$= (4x_1 - 1) \times m - 2\,[1 + 2 + 3 + \ldots + m\text{-}1]$
$m \in \mathbb{N}$
$= (4x_1 - 1) \times m - m\,(m - 1)$
$= 4\,m\,x_1 - m^2$

Donc :

$$3\,x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 4\,m\,x_1 + m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2m + \sqrt{3m^2+1} \text{ ou } x_1 = 2m - \sqrt{3m^2\text{-}1}$$

Or $x_1 \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{3m^2 + 1} \in \mathbb{N}$. Si on remplace, comme dans le cas $N = 2$, m par x_0, et si on note :

$$\sqrt{3m^2 + 1} = y_0,$$

alors :

$$3\,x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\,x_0 + y_0 \\ 3\,x_0^2 + 1 = y_0^2 \end{cases}$$

(x_0, y_0), (x_1, y_1) sont deux couples de solutions successifs de l'équation $3\,x^2 + 1 = y^2$.

Là encore, si l'on connait un couple solution (x_0, y_0), on peut en déduire un autre (x_1, y_1) :

$$\begin{cases} x_1 = 2\,x_0 + y_0 \\ y_1 = 2\,y_0 + 3\,x_0 \end{cases}$$

Si $N = K^2 + 1$.

[Une solution : $x = 2K$ et $y = 2K^2 + 1$.]

Alors $N x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow (K^2 + 1)x^2 + 1 = y^2$.

Soit (x_1, y_1) un couple solution de cette équation :

$$(K^2+1)x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (K x_1)^2 + x_1^2 + 1 = y_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 1 = y_1^2 - (K x_1)^2$$

Or $x_1^2 + 1 > 0$ donc y_1 est strictement supérieur à $K x_1$. Posons $y_1 = K x_1 + m$.

$$Nx_1^2+1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2+1 = (K x_1 + m)^2 - (K x_1)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 1 = 2 m K x_1 + m^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2 m K x_1 + 1 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = m K \pm \sqrt{m^2 K^2 + m^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = m K \pm \sqrt{N m^2 - 1}$$

Or $x_1 \in \mathbb{Z}$, $m K \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{N m^2 - 1} \in \mathbb{Z}$.

Posons : $\sqrt{N m^2 - 1} = M$, soit $N m^2 - 1 = M^2$.
$m^2 - 1 = M^2 - (K m)^2$.

Posons $M = K m + x_2$ où $x_2 \in \mathbb{N}$. Alors :

$$Nm^2 - 1 = M^2 \Leftrightarrow m^2 - 1 = (Km + x_2)^2 - (Km)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 2 x_2 K m + x_2^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2 x_2 K m - 1 - x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = x_2 K \pm \sqrt{x_2^2 K^2 + x_2^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow m = x_2 K \pm \sqrt{N x_2^2 + 1}$$

Or $m \in \mathbb{N}$, $x_2 K \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{N x_2^2 + 1} \in \mathbb{N}$.

Posons $\sqrt{N x_2^2 + 1} = y_2$, soit $Nx_2^2+1 = y_2^2$,

c'est-à-dire :

(x_2, y_2) est un couple solution de l'équation.

Donc, si (x_2, y_2) est solution de l'équation, alors (x_1, y_1) est aussi solution de cette équation, avec (x_1, y_1) tel que :

$$\begin{cases} x_1 = K m \pm \sqrt{N m^2 - 1} \\ y_1 = \sqrt{N x_1^2 + 1}, \text{ où } m = K x_2 + y_2 \end{cases}$$

Par exemple, si $N = 2 = 1^2 + 1$.
Dans ce cas $K = 1$.

On sait que (2, 3) est solution de cette équation. Alors :

$$m = K \times 2 + 3 = 5 \ ; \ N m^2 - 1 = 2 \times 25 - 1 = 49$$
$$x_1 = 5 + 7 = 12 \ ; \ y_1^2 = 2 \times 12^2 + 1 \ ; \ y_1 = 17$$

(12, 17) est aussi solution.

Si $N = K^2 - 1$.

[Une solution : $x = 1$ et $y = K$.]

Alors $N x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow (K^2 - 1)x^2 + 1 = y^2$.

Soit (x_1, y_1) un couple solution de cette équation :

$$(K^2-1)x_1^2 + 1 = y_1^2 \Leftrightarrow (K x_1)^2 - x_1^2 + 1 = y_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 1 = (K x_1)^2 - y_1^2$$

Or $x_1^2 - 1 > 0$ donc $K x_1$ est strictement supérieur à y_1.

Posons $y_1 = K x_1 - x_2$, où $x_2 \in \mathbb{N}$. Alors :

$$Nx_1^2+1 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2-1 = (K x_1)^2 - (K x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 1 = 2 K x_1 x_2 - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2 K x_1 x_2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = K x_2 \pm \sqrt{K^2 x_2^2 - x_2^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = K x_2 \pm \sqrt{N x_2^2 + 1}$$

Or $x_1 \in \mathbb{Z}$, $K x_2 \in \mathbb{Z}$, donc $\sqrt{N x_2^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Posons : $\sqrt{N\,x_2^2+1} = y_2$, soit $N\,x_2^2 + 1 = y_2^2$.

c'est-à-dire :

(x_2, y_2) est un couple solution de l'équation.

Donc, si (x_2, y_2) est solution de l'équation, alors (x_1, y_1) est aussi solution de cette équation, avec (x_1, y_1) tel que :

$$\begin{cases} x_1 = K\,x_2 + y_2 \\ y_1 = \sqrt{N\,x_1^2 + 1} \end{cases}$$

Par exemple, si $N = 3 = 4 - 1$. Alors $K = 2$. On constate que $(1, 2)$ est solution de l'équation $3\,x^2 + 1 = y^2$; alors $x_1 = K \times 1 + 2 = 4$, $y_1^2 = 3 \times 16 + 1 = 49$, $y_1 = 7$.

(4, 7) est aussi solution de l'équation.

Pour N quelconque.

On peut faire la remarque suivante. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples solutions de l'équation :

$$N\,x^2 + 1 = y^2$$

Calculons $N\,(x_1y_2 + y_1x_2)^2$:

$N\,(x_1y_2 + y_1x_2)^2 + 1$

$= N\,(x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + 2\,x_1x_2y_1y_2) + 1$

$= N\,y_1^2x_2^2 + 2\,N\,(x_1x_2y_1y_2) + N\,x_1^2y_2^2 + 1$

$= N\,(Nx_1^2+1)x_2^2 + 2N\,x_1x_2y_1y_2 + N\,x_1^2y_2^2 + 1$

$= N^2x_1^2x_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 + Nx_1^2y_2^2 + 1 + Nx_2^2$

$= N^2x_1^2x_2^2 + 2Nx_1y_1x_2y_2 + Nx_1^2y_2^2 + y_2^2$

$= N^2x_1^2x_2^2 + 2Nx_1y_1x_2y_2 + (Nx_1^2 + 1)y_2^2$

$= N^2x_1^2x_2^2 + 2Nx_1y_1x_2y_2 + y_1^2y_2^2$

$= (N\,x_1x_2 + y_1y_2)^2$

Donc :

$$N\,(x_1y_2 + y_1x_2)^2 + 1 = (N\,x_1x_2 + y_1y_2)^2$$

Donc le couple $(x_1y_2 + y_1x_2,\ N\,x_1x_2 + y_1y_2)$ est une solution de l'équation $N\,x^2 + 1 = y^2$.

Nous n'avons donc pas ainsi *résolu* une équation de Pell-Fermat, mais seulement *déduit* un couple solution de la connaissance d'un [NDLR : pas *un*, deux.] précédent couple solution.

Mais nous savons qu'un procédé de construction des solutions (étudié en particulier par Euler et Lagrange au XVIII° s.) utilise le développement en fraction continue de $\sqrt{N}$.

Pour la définition du développement en fraction continue de $\sqrt{N}$, on pourra se reporter à aux articles sur les fractions continues, pages 145 et 149.

$\sqrt{N}$ s'écrit : $$\sqrt{N} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

On pose : $$r_0 = \frac{p_0}{q_0} = a_0$$

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$r_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Donnons un exemple.
Soit l'équation $13\,x^2 + 1 = y^2$.

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}}$$

Pour la racine carrée d'un naturel, on obtient une suite périodique de nombres a_0, a_1, a_2, a_3, … .

Ici, on a par exemple, la suite périodique : 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 ….

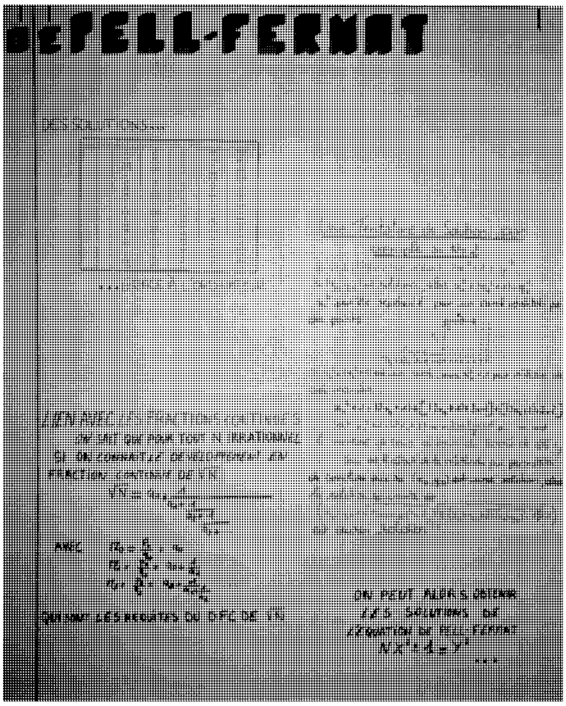
Un théorème précise que la plus petite des solutions de $N x^2 - 1 = y^2$ est la réduite r_i telle que la réduite r_{i+1} corresponde à une valeur $a_{i+1} = 2\, a_0$. Ici $a_5 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times a_0$.

$$r_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = \frac{p_4}{q_4}$$

$$y = p_4 = 18 \;;\; x = q_4 = 5.$$

On a bien, en effet, $13 \times 5^2 - 1 = 18^2$.

Cette méthode permet d'obtenir un couple solution de l'équation. D'après l'étude qui a été faite plus haut on sait en déduire d'autres — et sans doute une infinité de solutions. Reste à savoir si on a bien ainsi toutes les solutions …



Annexes

expériences sur ordinateur

```
DIM n%,x%,y#
n%=2
OPEN "résultats" FOR OUTPUT AS #1

Zero:
x%=0

Calcul:
WHILE x%<(3000)
x%=x%+1
g#=n%*((x%)^2)+1
y#=SQR(g#)
IF FIX(y#)=y#THEN GOTO Sortie
WEND

Augmente.N:
n%=n%+1
IF n%=100 THEN END
PRINT "•••• Pour N= "+STR$(n%)
PRINT
GOTO Zero

Sortie:
PRINT "• X= "+STR$(x%)
PRINT "   Y= "+STR$(y#)
PRINT #1,STR$(n%) CHR$(44) STR$(x%) CHR$(4
4) STR$(y#)
GOTO Calcul
```

page suivante, les listes obtenues …

[NDLC : pour ces listes, j'avais le choix, mais le plus simple était tout de même de les retaper, ce que je fis. Il y a des séquences qui sautent aux yeux, commençant par 1 pour les valeurs de X, par exemple : 1,4,15 pour N=3, et 1,6,35 pour N=8, et 1,8,63 pour N=15, etc, et il n'est pas sorcier de conjecturer que le triplet (N, X, Y) peut être de l'une des formes : $(k(k+2),\ 1,\ k+1)$, $(k(k+2),\ k+(k+2),\ k(k+2)+(k(k+2)+1))$ $(k(k+2),\ (k+(k+2)-1)\ (k+(k+2)+1),\ ?)$. A vous de contrôler que ces triplets sont bien solutions, et d'en trouver d'autres.

En fait, ces solutions ont été obtenues par les élèves (ah ? où ?), mais sans doute y a-t-il d'autres séquences, commençant par 2, ou … qui pourraient bien mener à des solutions qui n'ont pas été obtenues jusqu'ici. J'aurais l'impression de n'avoir pas saisi ces listes pour rien si vous les regardez de près, un crayon à la main …]

Valeur de N	Valeur de X	Valeur de Y	Valeur de N	Valeur de X	Valeur de Y
2	2	3	39	200	1249
2	12	17	40	3	19
2	70	99	40	114	721
2	408	577	41	320	2049
2	2378	3363	42	2	13
3	1	2	42	52	337
3	4	7	42	1350	8749
3	15	26	43	531	3482
3	56	97	44	30	199
3	209	362	45	24	161
3	780	1351	47	7	48
3	2911	5042	47	672	4607
5	4	9	48	1	7
5	72	161	48	14	97
5	1292	2889	48	195	1351
6	2	5	48	2716	18817
6	20	49	50	14	99
6	198	485	50	2772	19601
6	1960	4801	51	7	50
7	3	8	51	700	4999
7	48	127	52	90	649
7	765	2024	54	66	485
8	1	3	55	12	89
8	6	17	55	2136	15841
8	35	99	56	2	15
8	204	577	56	60	449
8	1189	3363	56	1798	13455
10	6	19	57	20	151
10	228	721	58	2574	19603
11	3	10	59	69	530
11	60	199	60	4	31
11	1197	3970	60	248	1921
12	2	7	62	8	63
12	28	97	62	1008	7937
12	390	1351	63	1	8
13	180	649	63	16	127
14	4	15	63	255	2024
14	120	449	65	16	129
15	1	4	66	8	65
15	8	31	66	1040	8449
15	63	244	68	4	33
15	496	1921	68	264	2177
17	8	33	69	936	7775
17	528	2177	70	30	251
18	4	17	71	413	3480
18	136	577	72	2	17
19	39	170	72	68	577
20	2	9	72	2310	19601
20	36	161	74	430	3699
20	646	2889	75	3	26
21	12	55	75	156	1351
21	1320	6049	77	40	351
22	42	197	78	6	53
23	5	24	78	636	5617
23	240	1151	79	9	80
24	1	5	79	1440	12799
24	10	49	80	1	9
24	99	485	80	18	161
24	980	4801	80	323	2889
26	10	51	82	18	163
26	1020	5201	83	9	82
27	5	26	83	1476	13447
27	260	1351	84	6	55
28	24	127	84	660	6049
29	1820	9801	86	1122	10405
30	2	11	87	3	28
30	44	241	87	168	1567
30	966	5291	88	21	197
31	273	1520	90	2	19
32	3	17	90	76	721
32	102	577	90	2886	27379
33	4	23	91	165	1574
33	184	1057	92	120	1151
34	6	35	93	1260	12151
34	420	2449	95	4	39
35	1	6	95	312	3041
35	12	71	96	5	49
35	143	846	96	490	4801
35	1704	10081	98	10	99
37	12	73	98	1980	19601
37	1752	10657	99	1	10
38	6	37	99	20	199
38	444	2737	99	399	3970
39	4	25	…	…	…