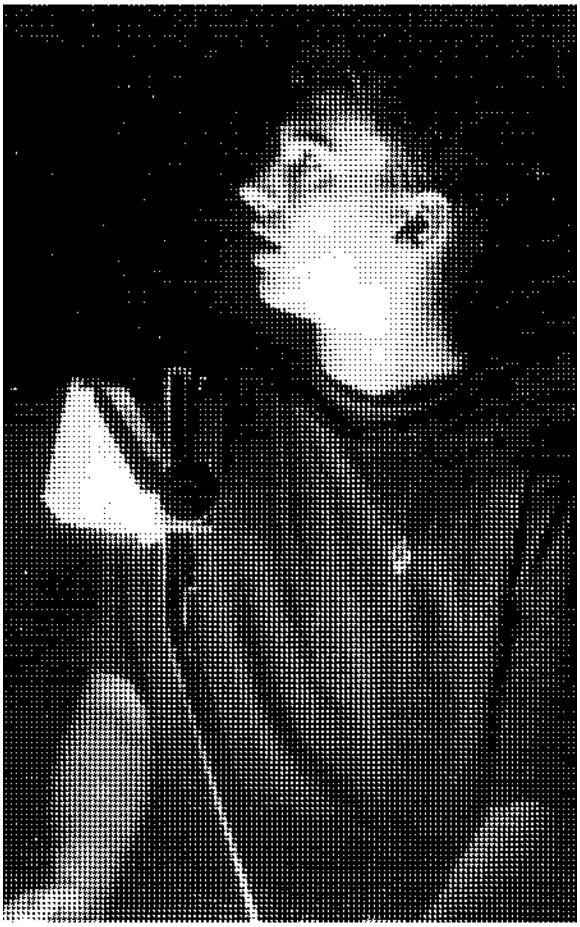
balade sur le cercle

par Christophe Peysson, des lycées Saint Exupéry et Jean Moulin de Lyon (69)

enseignants : Serge Betton, Marie-Claude Pontille

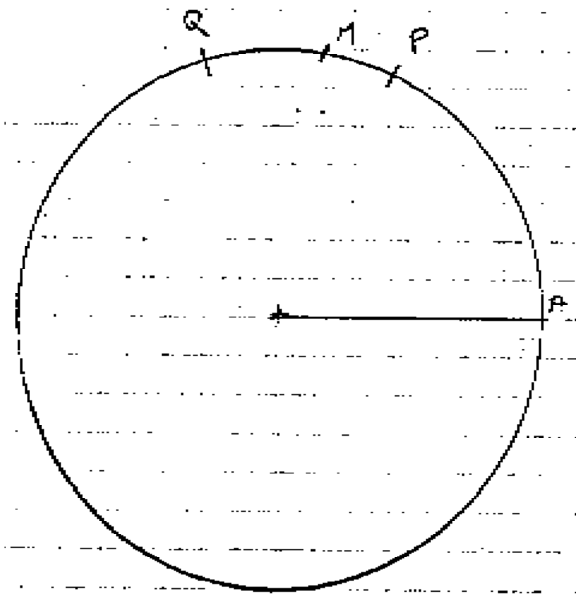
chercheur : Roland Assous

[NDLR : avertissement au lecteur : dans ce texte, les “abscisses” sont fréquemment comptées sur le cercle, en radians, comptées positivement dans le sens de rotation direct, à partir du point “origine des abscisses” : *A*. On aurait pu utiliser le mot “détermination” qui convient mieux à cette notion.]



sujet.

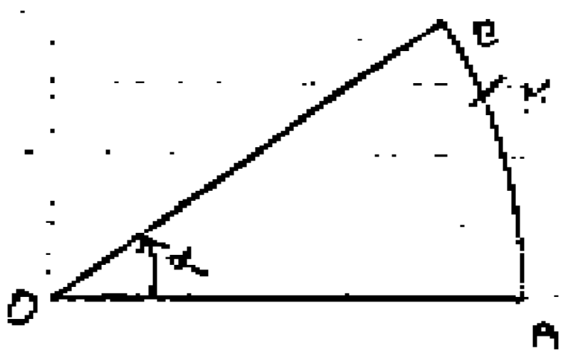
Plaçons-nous sur le cercle trigonométrique. Soit *A* le point d’origine des abscisses. Soient *P* et *Q* deux points du cercle.



Existe-t-il un point *M*, situé entre *P* et *Q*, tel qu’une des mesures de l’arc *AM* soit entière (en radians) ?

première approche.

Soit α un angle tel que $(OA, OB) = \alpha$. Soit *M* sur l’arc *AB*.



On cherche une abscisse *n* de *M*, telle que $n \in \mathbb{N}^*$.

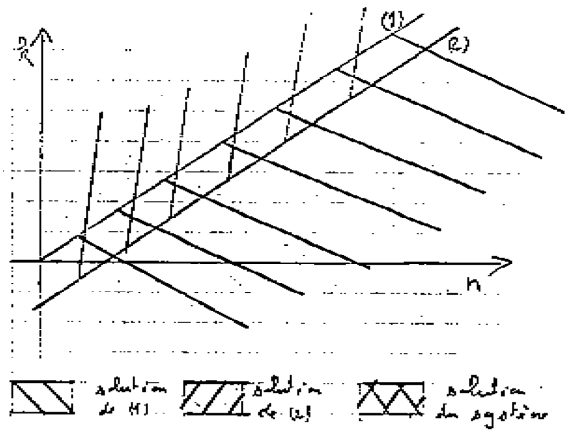
Donc *n* vérifie :

$$0 < n - 2k\pi < \alpha \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}.$$

Donc on a :

$$\begin{cases} k < \dfrac{n}{2\,\pi} \\ k > \dfrac{n - \alpha}{2\,\pi} \end{cases} \qquad \text{Posons :} \qquad \begin{cases} y < \dfrac{x}{2\,\pi} & (1) \\ y < \dfrac{x - \alpha}{2\,\pi} & (2) \end{cases}$$

Les droites d'équations (1) et (2) sont parallèles (même coefficient directeur $1/2\pi$). Le domaine solution est l'espace entre les droites. [NDLR : (1) et (2) ne sont pas des équations de ces droites, mais les "inéquations" de demi-plans bordés par ces droites.]

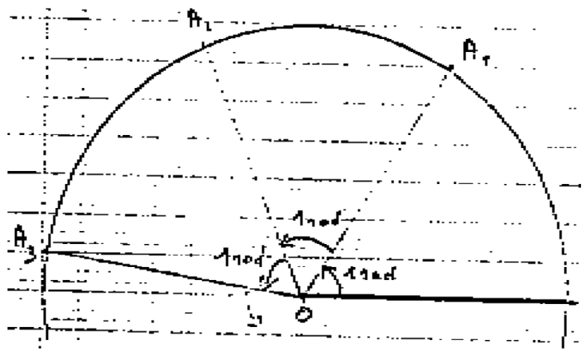


La solution serait un point d'abscisse entière, situé entre les droites. Mais si α devient très petit, la droite (2) se rapproche très près de la droite (1).

Ce point existe-t-il ? Ce n'est pas du tout évident de le voir sur une telle représentation. Cherchons une autre méthode. Elle nécessitera 3 étapes.

première étape

On effectue des rotations d'angle 1 rad[ian], de centre O, à partir de A, puis de ses images successives. Une de ces images pourrait-elle être ce point A ?



Existe-t-il A_n tel que $A_n = A$?

Soit n le nombre de fois où il faut répéter cette rotation pour que $A_n = A$. Bien sûr : $n \in$ N*. On a : $n = 2\,k\,\pi$ $(k \in$ Z), donc :

$$\pi = \frac{n}{2\,k}$$

Or, puisque $n \in$ N* et $k \in$ Z, alors $\dfrac{n}{2\,k}$ est une fraction rationnelle.

Donc π serait une fraction rationnelle ?! [NDLR : et on sait que ce n'est pas le cas.] Donc il n'existe pas $n \in$ N* qui résolve l'équation. D'où chaque point créé par la rotation est un nouveau point. [NDLR : presque ; le résultat établi est qu'on ne peut avoir $A_n = A$; il reste donc à établir — même si ce n'est désormais pas difficile — qu'on ne peut jamais avoir $A_n = A_m$.] Or, puisque l'on part du point A (abscisse 0), et que l'on fait des rotations d'angle 1 rad, les abscisses des images successives seront :

pour A_1 :	1 rad
pour A_2 :	2 rad
pour A_3 :	3 rad
…	
pour A_n :	n rad ($n \in$ N),

donc des ***mesures entières***.

Or on a vu que chaque point créé par notre rotation est un nouveau point. Donc cette rotation crée une infinité de points. Comme tous ces points ont une de leurs abscisses entières, il existe sur le cercle une infinité de points d'abscisse entière.

Cependant le cercle contenant une infinité de points, ont-ils ***tous*** une de leurs abscisses entière ?

deuxième étape

On va chercher à atteindre, toujours pour des rotations d'angle 1 rad, des points ayant une abscisse de la forme $\frac{a}{b}\pi$ ($a \in$ Z, $b \in$ Z*).

Soit n le nombre de fois qu'il faut répéter la rotation pour atteindre ce point. On a :

$$n = \frac{a}{b}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathrm{Z})$$

Donc :

$$n = \pi\left(\frac{a}{b} + 2k\right)$$

$$\pi = \frac{bn}{a + 2bk}$$

Dans ce cas encore, π serait une fraction rationnelle. On ne peut donc pas atteindre des points d'abscisse $\frac{a}{b}\pi$ ($a \in$ Z, $b \in$ Z*).

Essayons donc d'atteindre des points d'abscisse $\frac{a}{b}$ ($a \in$ Z, $b \in$ Z*). Dans ce cas, on a :

$$n = \frac{a}{b} + 2k\pi \quad (k \in \mathrm{Z}^*)$$

$$\pi = \frac{n - \frac{a}{b}}{2bk} = \frac{nb - a}{2bk}$$

Donc, puisque $a \in$ Z, $b \in$ Z* et que bien sûr $n \in$ N*, il est impossible d'atteindre des points ayant une abscisse de la forme $\frac{a}{b}$ ($a \in$ Z, $b \in$ Z*).

Ils n'ont donc aucune de leurs abscisses entières, ainsi que les points ayant une abscisse de la forme :

$$\frac{a}{b}\pi \ (a \in \mathrm{Z}, b \in \mathrm{Z}^*),$$

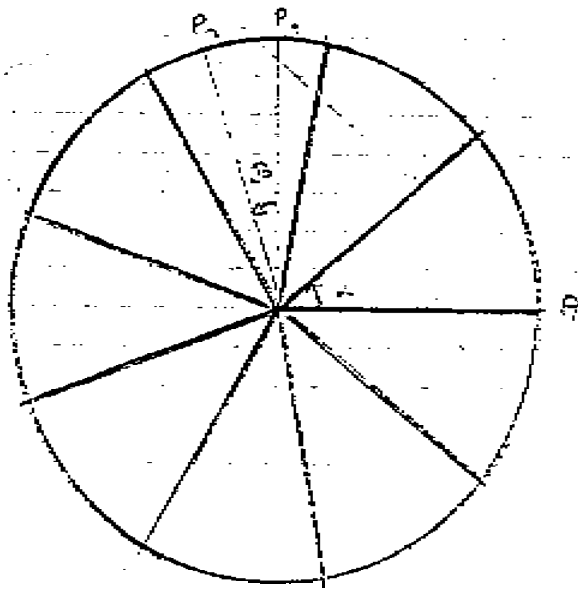
les points ayant une de leurs abscisses entière étant atteints — comme on l'a vu — par des rotations d'angle 1 rad.

Donc il y a sur le cercle une infinité de points ayant une de leurs abscisses entière et une infinité de points n'ayant aucune de leurs abscisses entière.

Seulement on ne sait pas comment sont réparties ces deux catégories de points sur le cercle.

troisième étape

Partageons le cercle en secteurs ayant chacun le même angle au centre : α. On a alors un nombre fini de secteurs et on sait qu'il y a un nombre infini de points ayant une de leurs abscisses entière. Il existe donc au moins un secteur contenant au moins deux de ces points. Appelons-les P_1 et P_2, et notons β l'angle qu'ils forment avec O.



Soient n_1 l'abscisse de P_1 et n_2 l'abscisse de P_2. Alors $\beta = |n_1 - n_2|$ …

Or, puisque n_1 et n_2 sont des naturels, alors

β *est aussi un naturel*.

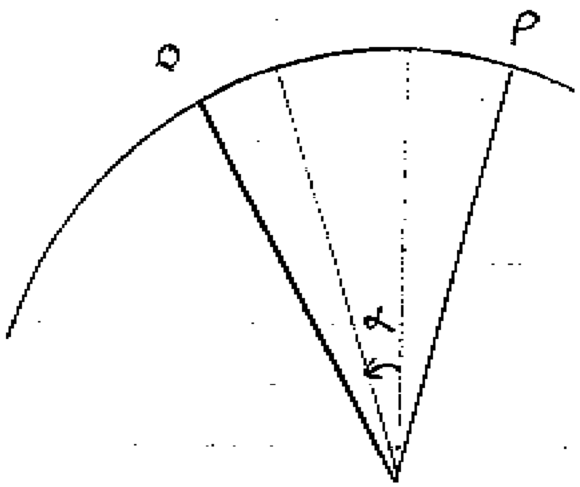
Effectuons la rotation d'angle β, et de centre O. Notons P_3 l'image de P_2. Son abscisse n_3 sera : $n_3 = n_2 + \beta$.

Comme $\beta \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, alors $n_3 \in \mathbb{N}$.

Donc la rotation d'angle β, et de centre O, donne à tout point ayant une de ses abscisses entière une image ayant elle aussi une de ses abscisses entière.

De plus, on a bien évidemment $\beta < \alpha$, donc en répétant cette rotation d'angle β on obtiendra des points ayant une de leurs abscisses entière, dans ***tous*** les secteurs. En effet, on ne pourra pas sauter par dessus un secteur puisque $\beta < \alpha$.

application à notre problème



La mesure de l'arc PQ n'est pas forcément un diviseur de 2 π. Mais il existe un angle α tel que :

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \widehat{POQ} \\ \dfrac{2\pi}{\alpha} = n \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Or on vient de voir qu'il existe un (des) point(s) sur l'arc ayant α comme angle au centre, qui a (ont) une mesure de son (leur) abscisse entière. Or à plus forte raison, il(s) appartien(nen)t à PQ.

annexe, à propos du principe des pigeons

Il est dit dans notre troisième étape que puisque l'on a un nombre fini de secteurs et un nombre infini de points, alors il y a au moins un secteur qui a au moins deux points. Cette affirmation est prouvée par ce que les Anglais appellent le *principe des pigeons*. [NDLR : les Français l'appellent le *principe des tiroirs*, ou le *principe de Dirichlet*.] Ce principe dit que si l'on veut placer n objets dans p emplacements et si $n > p$ alors il y aura au moins un emplacement contenant au moins deux objets.

Un petit exemple pour illustrer cette formidable trouvaille des mathématiciens : imaginez que votre grand-mère a dans son jardin 10 petites maisons pour les oiseaux. Mais voilà 15 pigeons (c'est pour ça que ça s'appelle le principe des pigeons et pas des hirondelles). Alors les mathématiques disent (comme le plus simple bon sens) que si tous les pigeons entrent dans les maisonnettes, alors il y en aura au moins une qui contiendra au moins deux pigeons. [NDLC : les Français sont plus prosaïques et parlent de paires de chaussettes à répartir dans des tiroirs de commode ; moins près des bêtes, mais plus près des préoccupations quotidiennes ? si on lançait une enquête sur le temps que perdent les mathématiciens à chercher leurs chaussettes dans les hôtels ?]

Dans notre cas, nous avons des secteurs (= des maisons) et des points ayant une de leurs abscisses entière (= des pigeons). On a plus de points (un nombre infini) que de secteurs (un nombre fini) d'où l'application de ce principe.