les fonctions

par Gaëlle Mue et James Rateau du lycée Val de Seine de Grand Quevilly (76)

enseignants : Dominique Grihon, Pierre Lacome

chercheur : Claude Dellacherie

[NDLR : le concept de fonction est sans nul doute une difficulté majeure dans l'enseignement actuel des mathématiques : dans des situations “variables” — notamment en géométrie — où des objets sont en relations avec d'autres objets, l'organisation de ces relations en dépendance (de nature fonctionnelle) de certains objets par rapport à d'autres est souvent la clef qui manque à la compréhension. Puisse ce travail susciter d'autres tentatives d'apprivoisement.]

Le sujet porte sur l'étude des propriétés auxquelles répondent certaines fonctions. Le sujet étant très vaste, nous nous sommes intéressés à deux ensembles de fonctions :

• les fonctions à variables réelles ;

• les fonctions ~~à~~ [dans un] ensemble fini.

les fonctions à variables réelles

Nous avons posé des propriétés telles que :

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(a+b) = f(a \times b)$$
$$f(a+b) = f(a) \times f(b)$$

et ainsi avec les quatre opérations : la multiplication, la division, l'addition et la soustraction.

On a alors cherché les fonctions répondant à ces propriétés et on les a répertoriées au sein d'un tableau. Cependant, pour certaines propriétés, on a trouvé des fonctions qui y répondent mais nous ne sommes pas persuadés qu'il n'y a que celles-ci : c'est ce qui correspond à la partie du tableau délimitée en rouge [NDLC : à quand la quadrichromie pour les actes de MATh.en.JEANS ? la demande vient de la base !] sauf pour la fonction exponentielle notée e^x dont on a démontré l'unicité lors d'un exercice en classe.

	$f(a)+f(b)$	$f(a)\times f(b)$	$f(a)-f(b)$	$f(a)/f(b)$	$f(a-b)$	$f(a/b)$	$f(a\times b)$
$f(a+b)$	$f(x) = \alpha x$	$f(x) = e^{nx}$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$	constante	constante	constante
$f(a\times b)$	$f(x) = \ln x^p$	$f(x) = x^{n/p}$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$	constante	constante	
$f(a/b)$	$f(x) = 0$ sauf en 0	$f(x) = 1$ sauf en 0	$f(x) = \ln x^p$	$f(x) = x^{n/p}$	constante		
$f(a-b)$	$f(x) = 0$	$f(x) = \pm 1$	$f(x) = \alpha x$	$f(x) = e^{nx}$			
$f(a)/f(b)$	$f(x) = 1/2$	$f(x) = 1$	impossible				
$f(a)-f(b)$	$f(x) = 0$	$f(x) = 0$					
$f(a)\times f(b)$	$f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$						

Pour les deux autres parties du tableau, nous avons changé notre mode de démonstration, ce qui nous a permis de trouver toutes les fonctions répondant à chaque propriété. En effet, pour la partie encadrée en rouge, nous étions partis des propriétés des fonctions que nous avions apprises en cours pour remplir le tableau. Tandis que pour les autres parties, nous avons posé successivement plusieurs conditions sur les variables a et b afin de déterminer les fonctions.

Par exemple, si on considère la propriété $f(a + b) = f(a) - f(b)$ nous avons procédé de la manière suivante. On a posé :

$$\begin{gathered} \text{si } a = 0 \\ f(0 + b) = f(0) - f(b) \\ f(b) = f(0) - f(b) \\ 2\, f(b) = f(0) \end{gathered}$$

On obtient alors une première information sur les fonctions qui répondent à la propriété $f(a + b) = f(a) - f(b)$ mais ce n'est pas suffisant. On pose alors une seconde condition :

$$\begin{gathered} \text{si } a = b = 0 \\ f(0 + 0) = f(0) - f(0) \\ f(0) = 0 \\ \text{or } 2\, f(b) = f(0) \\ \text{donc } f(b) = 0 \end{gathered}$$

De là, on peut conclure que la fonction qui répond à la propriété $f(a + b) = f(a) - f(b)$ est la fonction d'équation $f(x) = 0$. C'est ainsi qu'on a pu remplir le tableau.

A l'intérieur du tableau, à part a et b, nous avons utilisé plusieurs autres variables pour définir les fonctions :

- α et n sont des variables réelles
- p est une variable réelle non nulle

Qu'avons-nous appelé "***fonction constante***" ? Ce sont les fonctions du type suivant :

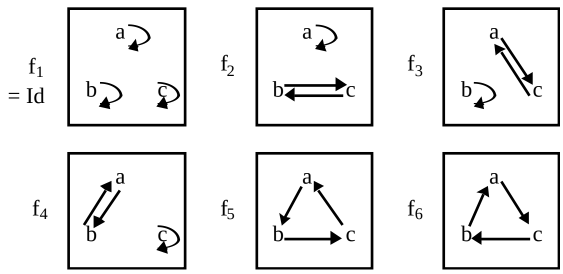
- $y = 1$
- $y = 2$
- $y = 3$

…

- $y = m$ avec m une variable réelle.

les fonctions dans un ensemble fini

On a étudié les fonctions ~~d'un~~ [dans un] ensemble fini à trois éléments. Ces fonctions sont les suivantes :

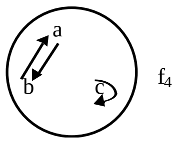


On a ensuite composé ces six fonctions entre elles, deux à deux.

exemple de composée : $f_3 \circ f_5$

$$\begin{gathered} f_3 \circ f_5\,(a) = f_3\,(b) = b \\ f_3 \circ f_5\,(b) = f_3\,(c) = a \\ f_3 \circ f_5\,(c) = f_3\,(a) = c \end{gathered}$$

On obtient la fonction suivante :



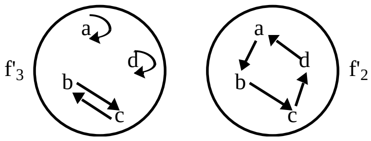
Après avoir fait toutes les compositions suivantes, on a obtenu de nouveau un tableau :

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

Cette étude nous a permis de conclure sur le fait que la composée de deux de ces six fonctions est une fonction appartenant à l'ensemble des six fonctions initiales précédemment défini.

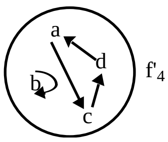
On a ensuite fait la même chose avec un ensemble fini à quatre éléments. Mais cette étude est beaucoup plus vaste. En effet, à partir de quatre éléments, correspond un ensemble de 24 fonctions (A_4^4 fonctions)

par exemple :



$f'_3 \circ f'_2 (a) = f'_3 (b) = c$
$f'_3 \circ f'_2 (b) = f'_3 (c) = b$
$f'_3 \circ f'_2 (c) = f'_3 (d) = d$
$f'_3 \circ f'_2 (d) = f'_3 (a) = a$

On obtient :



A partir de deux fonctions de cet ensemble fini, à quatre éléments, on aboutit, de la même manière que dans l'ensemble fini à trois éléments, à une fonction de l'ensemble initialement défini.

Cette vaste étude nous a permis de voir les fonctions sous un autre angle qu'on les voit en cours.