algèbre et informatique

par Jacqueline Zizi

[NDLR : texte écrit d'après l'enregistrement sonore de la conférence donnée au Palais de la découverte.]

Plutôt que de faire des exposés-chercheurs traitant de sujets décidés par eux, il m'a semblé important de saisir l'occasion du congrès pour répondre aux questions des élèves participant à MATh.en.JEANS et de traiter les problèmes qui les intéressent, eux.

J'ai donc demandé à Stéphane Fischler, un élève qui fait partie du bureau de l'association MATh.en.JEANS, de collecter les questions que les élèves souhaitaient voir traiter, ce qu'il a fait. Voilà donc les sujets sur lesquels les chercheurs devaient plancher.

Questions intéressant les élèves

*** Théorie des jeux**

*** Modélisation**

*** Utilisation de l'ordinateur**

- **Utiliser *Mathematica* ou un équivalent pour résoudre un Problème de Bac ou de Brevet**
- **Valeur des démonstrations par ordinateur : théorème des 4 couleurs**

*** La complexité des problèmes**

*** Notions de base d'algèbre**

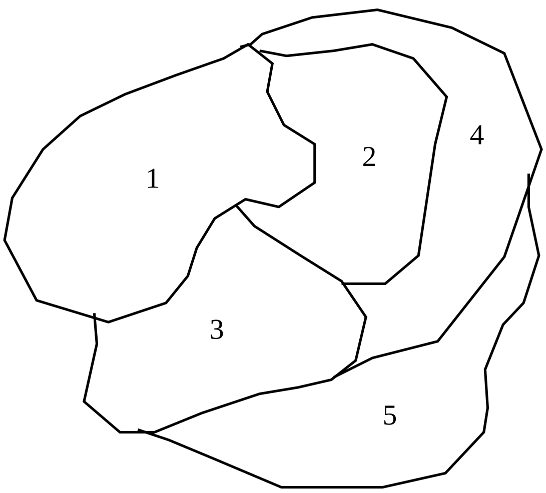
C'est donc dans cet objectif qu'ont été traités:
• « Pascal et Fermat. La naissance du calcul des probabilités. », jeu posé par le Chevalier de Méré, voir l'article de Claude Dellacherie, page 207;
• « algèbre et informatique », résumé dans cet article ;
• « l'algèbre à travers les équations », voir l'article de Jean-Paul Cardinal, page 231 ;
• « modélisation, simulation et écorésolution ».
Sans s'en éloigner, ces titres ne recouvrent pas toutes les questions. En particulier, la complexité des problèmes, qui est une question extrêmement difficile, n'a pas été traitée.

Si on connaît un certain nombre de choses sur la complexité des algorithmes, la complexité des problèmes, la vraie question, est loin d'avoir livré tous ses mystères ; il y a de très bons spécialistes en France et en particulier le responsable du centre de calcul formel de l'école polytechnique. Sollicité, il aurait aimé venir, mais il n'a pas pu se libérer de ses obligations, très nombreuses en cette époque de l'année et s'en est excusé.

Comme le public était constitué d'élèves de tous âges, avec une bonne proportion de "petits 5èmes", traiter un sujet de Bac ou même de brevet avec un ordinateur, sur transparents, ne m'a pas semblé la meilleure voie pour capter l'attention et répondre à la question sous-jacente, importante : quels apports et interactions réciproques existent entre mathématiques et informatique ? C'est donc par le plus médiatisé et le plus simple d'accès, le théorème des quatre couleurs que j'ai commencé cette aventure.

Théorème des quatre couleurs.

Le théorème *des quatre couleurs* est simple à comprendre ; il apporte une réponse définitive à la question : combien faut-il de couleurs pour colorier une carte de plusieurs pays, sachant que deux pays voisins ne peuvent être coloriés avec une même couleur ? Admettons, pour fixer les idées, que le dessin ci-dessous représente une carte, avec des pays, numérotés 1, 2, 3, 4, 5 :



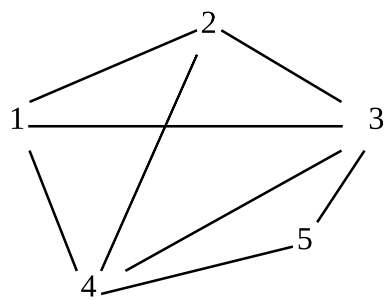
Quand une couleur est choisie pour le pays 1, elle ne peut plus être utilisée pour le pays 3, ni pour le pays 2, ni pour le pays 4, parce qu'ils ont une frontière commune avec le pays 1. Par contre, cette même couleur peut êtreréutilisée pour le pays 5, qui n'a pas de frontière commune avec le pays 1. Etc.

La "démonstration" du *Théorème*, que les mathématiciens cherchaient depuis plusieurs années, s'appuie sur des résultats obtenus par ordinateur. Comment est-ce possible ? Quelle valeur ont de telles preuves ? La question est d'actualité et voici une traduction d'une réponse donnée en février 94 par le professeur D. Lazard, mathématicien français mondialement reconnu dans le domaine du calcul formel :

« … Dans ces conditions, une démonstration assistée par ordinateur qui utilise des calculs "exacts" est bien plus sûre qu'une preuve "pure" faite toute à la main ; la probabilité la plus grande d'erreur se trouvant dans la partie faite à la main. »

Pour comprendre pourquoi et comment on peut être amené à faire des calculs exacts avec un ordinateur, revenons à notre problème de carte et de couleurs. Une schématisation facile à comprendre est la suivante :

Considèrons les numéros représentant les pays comme des points quelconques du plan, qu'on appelera *sommets* dans la suite. On décide de relier deux points quand les pays correspondants ont une frontière commune : par exemple 1 et 3, ou encore 1 et 2, 1 et 4, mais aussi 3 et 5, etc. On obtient alors ce qu'on appelle un *graphe*.

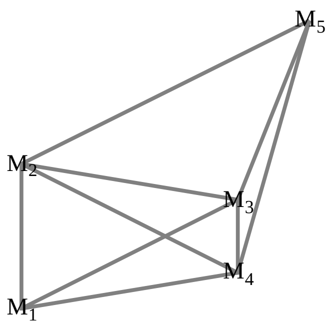


Le graphe ainsi construit cristallise les propriétés intéressantes sans s'encombrer des détails inutiles pour le problème comme la forme ou la place des pays. Si cette schématisation permet une simplification du problème, elle ne permet pas, toutefois, de tout résoudre, car il reste de nombreux problèmes ouverts en théorie des graphes.

un petit tour en théorie des graphes

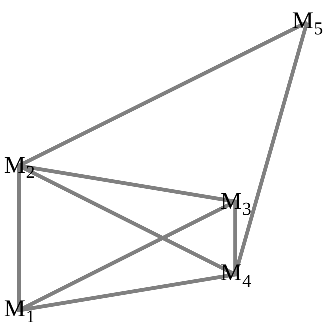
Supposons tout simplement que l'on dispose d'un graphe et de q couleurs, (disons 3). Comment peut-on trouver le nombre total de coloriages des sommets du graphe, sachant que deux sommets reliés ne peuvent être coloriés avec la même couleur ? Pour un segment, la réponse est simple : c'est $q\ (q\text{-}1)$ (disons 6). Pour un triangle aussi, c'est simple, c'est : $q\ (q\text{-}1)(q\text{-}2)$ (ou 6 dans notre cas particulier).

L'idée, en fait, est d'associer un polynôme au graphe. Mais supposez qu'on prenne un graphe très simple, G, comme celui-ci :

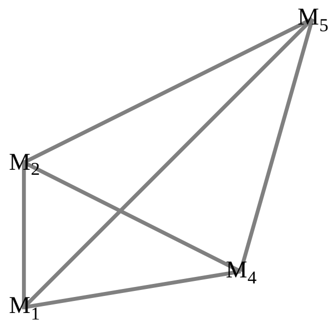


Le polynôme associé n'est pas évident. Aussi, pour le trouver, on décompose le graphe initial en 2 graphes plus simples :

Premier graphe, $G[1]$: on enlève à G une arête, celle qu'on veut, par exemple M_3M_5.



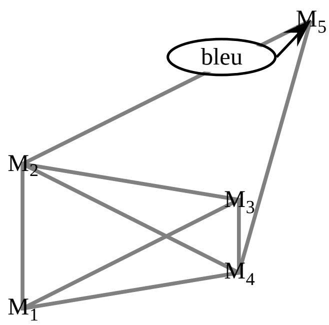
Deuxième graphe, $G[2]$: on recolle les deux points qui étaient reliés par l'arête enlevée. (ici M_3 et M_5), ce qui donne :



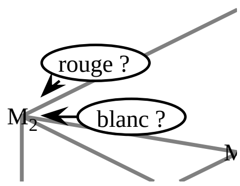
On démontre que le polynôme de G s'obtient simplement à partir de ceux de $G[1]$ et $G[2]$.

Bien que les graphes soient plus simples et même si on choisit un cas particulier, par exemple 3 couleurs : bleu, blanc et rouge, il n'est pas très facile de trouver le résultat. On peut jouer à :

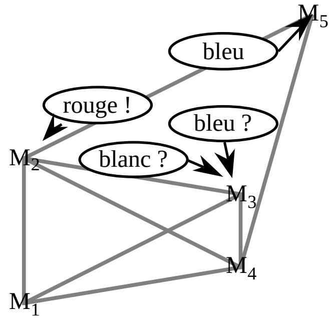
si on met du bleu là,



on ne pourra plus mettre que rouge ou blanc ici :



Et puis une fois qu'on aura mis du rouge, ici, on pourra choisir entre bleu et blanc :



mais envisager tous les cas n'est pas très simple.

Par contre, recommencer le procédé de décomposition jusqu'à trouver un cas simple est plus facile. Un cas est simple lorsqu'on sait facilement trouver le polynôme associé. C'est en particulier le cas des *arbres*..

Pour ce problème, et pour beaucoup d'autres, il est donc important de repérer des arbres dans un graphe.

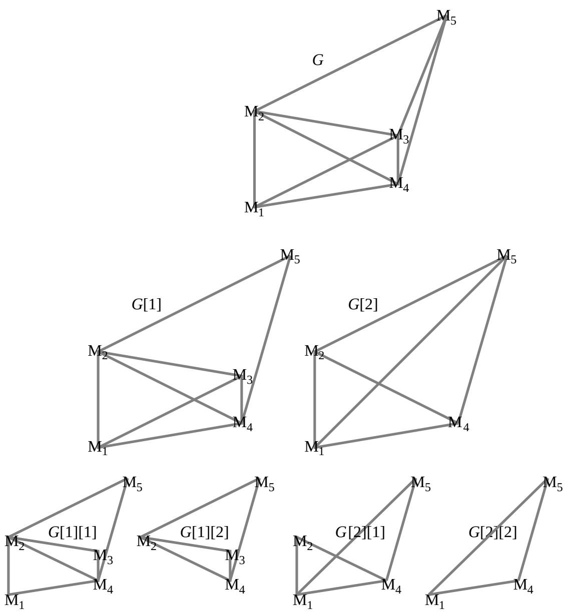
Informatiser ces calculs exacts sur des graphes est simple avec Mathematica. J'ai commencé par écrire une petite fonction que j'ai appellée couperEn2. Elle me demande quelle arête je veux enlever puis elle me dessine automatiquement $G[1]$ et $G[2]$ à partir de G.

Ensuite, il est facile de faire travailler cette fonction sur un étage quelconque de la recherche, quel que soit le nombre de graphes d'un étage : c'est la fonction définie ci-dessous (les 2 premières lignes).

Enfin, si je veux avoir deux étapes, il suffit d'écrire la dernière ligne, qui compose automatiquement les opérations (ici 2 fois).

```
etageApres [etage_] := Flatten [Map
                       [couperEn2, etage]]
NestList [etageApres, {$graphecourant$}, 2]
```

Tous les graphes s'alignent alors les uns après les autres :



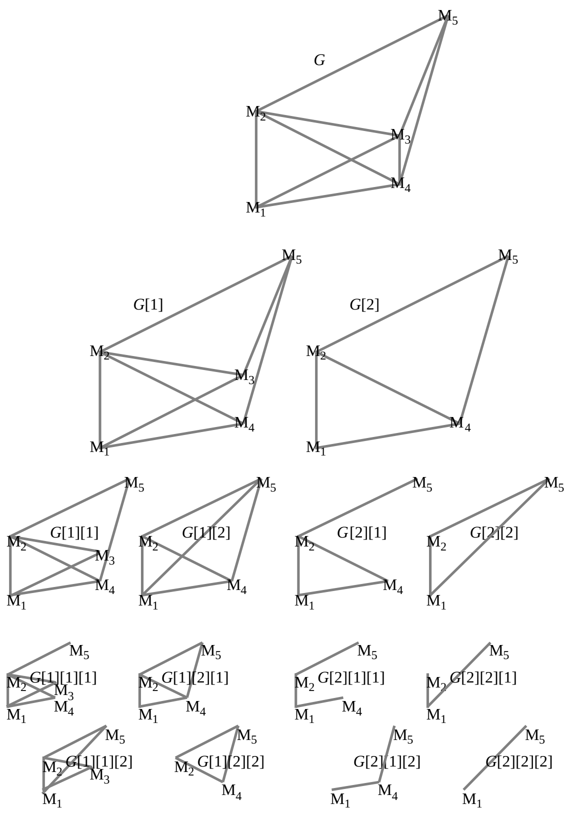
d'abord $G[1]$ et $G[2]$;

ensuite, la fonction reprend $G[1]$, et elle le redécompose en $G[1][1]$, $G[1][2]$;

puis elle reprend $G[2]$, qu'elle redécompose en $G[2][1]$, $G[2][2]$.

Voilà seulement deux étapes, mais c'est la même fonction qu'on utiliserait pour faire trois étapes, quatre étapes, quinze étapes, vingt étapes si on veut. Il n'y a rien de plus à écrire ; simplement on change le coefficient, c'est-à-dire le nombre d'étapes : à la place du 2, on écrirait 3, 4, 15 ou 20. Voici pour 3 :

```
NestList [etageApres, {$graphecourant$}, 3]
```



On voit G ; en dessous on a $G[1]$ et $G[2]$ ensuite $G[1]$ donne $G[1][1]$ et $G[1][2]$ et puis $G[2]$ avec ses deux fils, etc. Déjà à l'étape 3, beaucoup de graphes sont simples et leur polynôme est évident. Mais ils sont nombreux…

En même temps, on peut demander au système l'état des relations, si on a bien structuré ses données, bien sûr. Il suffit par exemple, comme on peut le voir ci-après, de lui poser la question « ? *G* ».

```
?G

Global`G

listeRelations[G] ^=
{{M1, M2}, {M1, M3}, {M1, M4}, {M2, M4},
{M2, M5}, {M3, M2}, {M3, M4}, {M3, M5},
{M5, M4}}

listeRelations[G[1]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M3}, {M1, M4}, {M2, M4},
{M2, M5}, {M3, M2}, {M3, M4}, {M5, M4}}

listeRelations[G[2]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M4}, {M2, M5}, {M4, M2},
{M5, M4}}

listeRelations[G[1][1]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M3}, {M1, M4}, {M2, M4},
{M2, M5}, {M3, M2}, {M5, M4}}

listeRelations[G[1][2]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M4}, {M1, M5}, {M2, M4},
{M5, M2}, {M5, M4}}

listeRelations[G[2][1]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M4}, {M2, M5}, {M4, M2}}

listeRelations[G[2][2]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M5}, {M5, M2}}

listeRelations[G[1][1][1]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M3}, {M1, M4}, {M2, M4},
{M2, M5}, {M3, M2}}

listeRelations[G[1][1][2]] ^=
{{M1, M2}, {M1, M3}, {M1, M5}, {M2, M5},
{M3, M2}}
```

Les élèves de mon jumelage qui ont cherché à coder des arbres ont trouvé parfois compliqués leurs résultats avec des crochets et des parenthèses, mais en fait, ceci devrait les rassurer et leur montrer que les fonctions que l'on compose produisent naturellement cette multiplicité de parenthèses.

le problème intéressant

Le problème initial a été remplacé petit à petit par le problème suivant : vous vous donnez un graphe au départ, soit *G*, et vous le coupez en deux et vous recommencez et puis vous recommencez et puis vous recommencez et puis vous recommencez et vous recommencez et vous recommencez.

A la main, il faut beaucoup de courage. Par contre, faire tourner ce petit programme sur ordinateur demande peu d'efforts. Mais si vous mettez ça à tourner sans plus chercher à comprendre et si vous voulez étudier tous les cas possibles, alors, pour un graphe comme celui-là, tout compris, avec les calculs de polynômes et la recherche des racines, il faut compter pas loin d'une heure en MAPLE, sur un gros système.

Alors évidemment, on se pose beaucoup de questions car on aimerait aussi résoudre le problème pour des graphes beaucoup plus gros. Quelle est la bonne arête, est-ce qu'il y a une technique à trouver ? Est-ce qu'il y a une logique dans cette affaire ?

On est donc amené à observer les différents essais et à essayer d'apprendre au système à repérer de lui même les cas simples. Comment lui faire comprendre ce qu'est un arbre par exemple ? Quelles opérations peut-on lui faire faire sur ces structures ? Autrement dit, comment définir un arbre et les opérations sur les arbres ?

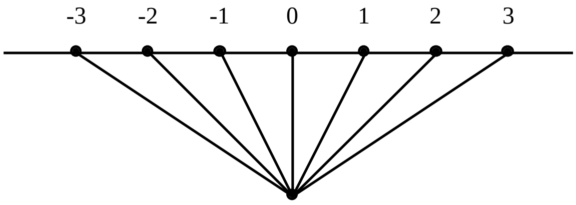
Ce sont ces questions que j'ai posées comme sujet de recherche aux élèves de mon jumelage. Aussi, j'ai été bien surprise de voir que ces petits 5ème et 4ème ont été pris à partie par un adulte, sûr de ses connaissances, le jour du congrès :

« ouais, mais un graphe on connaît bien,
c'est un ensemble ordonné,
alors vos histoires ... ».

C'est pourquoi, j'ai été amenée à développer les idées suivantes.

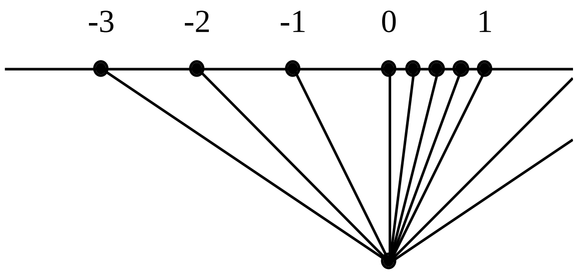
des arbres … à l'infini

Je pars des entiers : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 que je représente sur une droite comme tout le monde et je choisis un point à l'extérieur de cette droite. Pour faire un arbre, en partant de ce point, c'est facile : je vais à 1, je vais à 2, je vais à 3. Et je peux faire ça à l'infini.

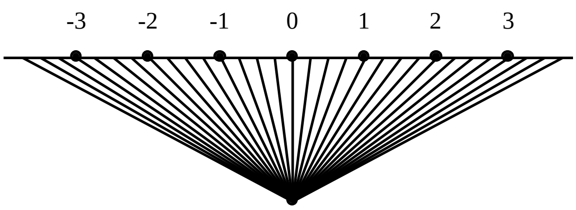


Ensuite, il est bien clair que tous les intervalles, par exemple [0, 1], je peux les couper en deux si j'ai envie.

Je peux aussi les couper en 3, ou en 4, ou en 5, ou en en 6, donc je peux faire grossir l'arbre :

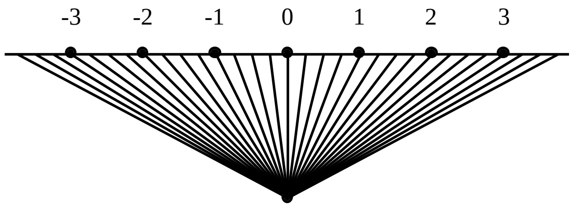


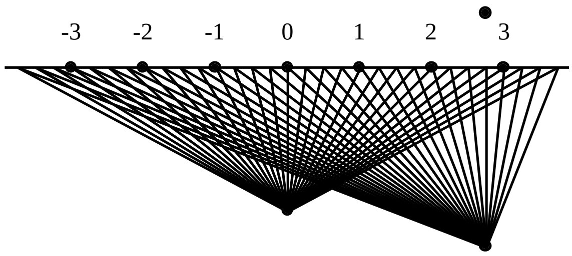
Je peux recommencer, à l'infini :



Mais le point extérieur que j'ai choisi, je l'ai pris au hasard. Je pourrais donc en prendre un autre et reconstruire quelque chose.

Puis je pourrais prendre ces points comme j'ai considéré -3, -2, -1, 0, 1, 2 et recommencer, etc.





Toutes ces constructions ont été présentées dans le plan, mais personne ne m'empêche de choisir un point à l'extérieur du plan et de recommencer. Vous allez me dire : « mais tout ça est compris dans un espace de dimension 3 », mais on peut recommencer et continuer un autre jour donc travailler en dimension 4, etc. On pourrait même prendre un point dans chacun des ensembles que l'on connait. Et au bout du compte, on aurait un truc énorme et voilà ma question :

Comment démontrer que ce truc est un ensemble ?
Et puis, ensuite, comment montrer qu'il est ordonné ?

Bien évidemment, il n'y a pas de réponse simple à ma question.

J'ai fait ensuite remarquer que nos petits amis de $5^{\text{ème}}$ et de $4^{\text{ème}}$ se sont posé les bonnes questions : ils se sont mis dans deux salles différentes, un définissait un arbre qu'un autre avait dessiné au tableau.

Un troisième dans l'autre salle essayait de reproduire l'arbre. Ils se sont posé beaucoup de questions et ils ont fini, après d'âpres discussions, à arriver à un consensus : même s'il n'est pas facile de définir ce qu'est un arbre, on peut travailler avec.

Comme pour les entiers, d'une certaine façon.

D’ailleurs, nos petits amis de $5^{ème}$ et $4^{ème}$ ont compris que, comme pour les entiers, on pouvait toujours définir la somme de 2 arbres et le suivant d’un arbre et donc calculer.

Toutefois, ils ont remarqué que les calculs n’étaient pas vraiment pareils c’est-à-dire que les propriétés de ces opérations n’étaient pas toujours les mêmes que celles des entiers.

Ensuite, ils ont cherché une représentation compréhensible par un clavier, c’est-à-dire une suite de caractères, un code, le plus simple possible. Ils ont ainsi associé à un arbre un code et réciproquement.

Ils ont essayé de voir quelles étaient les propriétés de cette association en se séparant à nouveau dans des salles différentes et ils ont aussi étudié comment se comportait cette codification avec les opérations somme et suivant.

En fait, ils se sont posé des questions, ils ont fait preuve de réflexion et d’esprit critique, d’imagination. Ils ont construit et travaillé et d’ailleurs ce qu’ils ont raconté n’est écrit dans aucun livre …

Qu’ont-ils fait au juste ? des mathématiques ? de l’informatique ?

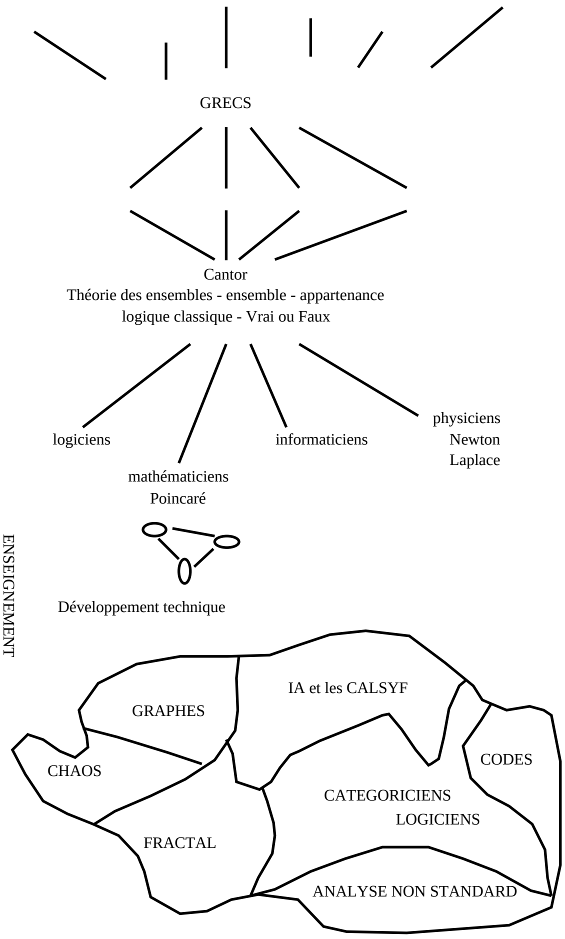
• ***« mathématique et informatique »***

Résumer les mathématiques en un schéma d’une page et toute l’informatique sur une autre page est bien difficile.

Mais je souhaitais mettre en regard ces deux feuilles.

Comme le titre de l’exposé est algèbre et informatique, je ne traiterai pas l’informatique numérique ; je ne traiterai que l’informatique *algébrique*, si j’ose dire, ce que les Américains appellent « computer algebra » ou « symbolic computation », et que nous appelons « CALSYF », pour CALcul SYmbolique et Formel.

les mathématiques …



En fait, ce schéma, c’est toute l’histoire des mathématiques, si j’ose dire. C’est très abrégé, forcément et aussi très schématique, forcément.

Ces petits traits représentent ce que font les élèves à MATh.en.JEANS, à mon avis, c’est-à-dire : ils font des mesures, ils font des conjectures, certaines ils les “montrent”. De temps en temps ils en ont assez de faire des calculs donc ils se cherchent une formule, ils la trouvent, ils la testent sur plein de cas.

Parfois ils disent, comme je l’ai entendu :

« c’est prouvé par ordinateur »

moi, je veux bien, mais … bon …

Et puis on est arrivé aux Grecs. Et les Grecs ont dit : c’est bien tout ça, mais pour être sûr de quelque chose il faut le prouver. C’est ainsi que sont nés raisonnement et axiomatique en mathématiques. A partir de là, les gens sont partis dans des directions différentes : il y a eu des physiciens, il y a eu des mathématiciens, qui ont travaillé la théorie des nombres, la géométrie, etc. enfin il y a eu plein de courants divergents, bon nombre dans la lignée des idées des scientifiques des siècles précédents (Newton, Laplace, etc.) On s’est retrouvé longtemps après, avec des tas de problèmes, parce que tous ces personnages qui faisaient tous des mathématiques avaient leur vocabulaire à eux, leurs techniques à eux, mais tout de même, c’étaient tous des mathématiciens, souvent aussi d’ailleurs des physiciens et des philosophes.

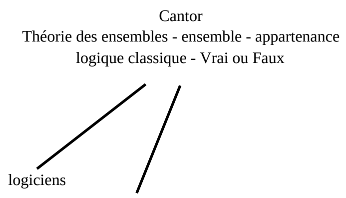
A la fin du siècle dernier, il y a eu d’immenses espoirs de standardisation et en même temps de gros problèmes. C’est à cette époque là qu’on a précisé et défini la notion de fonction et les propriétés de ces fonctions comme on le fait aujourd’hui. De la même façon que nos petits amis de 5ème et 4ème ont associé un codage à un arbre, les mathématiciens de l’époque ont commencé à associer à certaines fonctions, une suite de coefficients appelés coefficients de Fourier. Bien sûr, ils se sont alors posé la question de savoir si ces coefficients caractérisaient bien les fonctions, autrement dit, s’il pouvait se faire que par ce procédé, on associe à des fonctions différentes, les mêmes coefficients de Fourier.

alors Cantor est arrivé

Cantor a commencé à travailler sur ce genre de questions. Et comme c’était un matheux, il a voulu approfondir et généraliser, puis ensuite approfondir et généraliser ce qu’il venait de trouver. Finalement il a mis sur pieds toute une théorie mathématique, appelée *la théorie des ensembles*, et qui a, pratiquement, gouverné toute la suite des mathématiques. Toute, ou presque toute …

occupée par les Romains... Toute ? Non ! Un village peuplé d’irréductibles Gaulois résiste encore et toujours à l’envahisseur. Et la vie n’est pas facile pour les garnisons de légionnaires

Dans la théorie des ensembles, les choses fondamentales sont l’ensemble, l’appartenance et l’ensemble vide que je n’ai pas représenté (mais il est là quand-même). Et il y a un fond qui est la logique classique. A partir du concept d’ensemble, de l’ensemble vide, on construit toutes les mathématiques. C’est très facile en informatique, par exemple, de mettre en évidence la construction des entiers. Il suffit de 3 lignes pour construire tous les entiers, à partir de vide. Et puis à partir des entiers 1, 2, 3, on construit des -1, -2, -3 et enfin toutes les constructions habituelles.



Tout ça, c’était dans une logique : « vrai ou faux ». Vous savez, quand vous faites un devoir, si vous répondez 4 x à une question, le prof vous dit « oui » ou « non », mais il ne vous dit pas « j’sais pas ». Toutefois, si vous lui posez trop de questions, il lui arrivera peut-être de vous répondre : « j’sais pas » donc vous sentez bien qu’il y a d’autres logiques, mais enfin, en maths, au collège, c’est « vrai ou faux » : le cercle passe par le point, c’est vrai ou c’est faux, il n’y a pas de problème. C’est comme pour les ordinateurs et l’électricité : le courant passe ou il ne passe pas. C’est ce qu’on appelle une logique binaire.

Evidemment, chaque fois qu’un mathématicien vient avec des idées nouvelles, on dit : « il est fou » ou … enfin, il y a toujours des problèmes. (N’est-ce pas ce qui est arrivé à notre amie Barbara venue avec des résultats originaux sur les fractions continues et aussi à notre ami Eric qui présentait une voie originale de calcul des volumes ? Bref …)

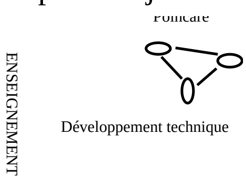
Les logiciens ont trouvé des contradictions dans les travaux de Cantor, enfin pas tout de suite, mais au bout d’un certain temps. Les mathématiciens se sont aussi posé des questions. On s'est éloigné des contradictions et aujourd'hui, on travaille dans une théorie des ensembles cohérente, berceau de tous les progrès scientifiques de ce siècle. Mais, maintenant, certains informaticiens poussent à la roue, parce qu'ils se sont aperçus que la logique traditionnelle, binaire, ne leur suffit pas, en particulier lorsqu'ils ont travaillé et inventé ce qu'on appelle les systèmes experts.

En même temps, certains d'entre eux rencontrent des problèmes, abstraits, que le vocabulaire mathématique ensembliste actuel, ne leur permet pas d'exprimer.

Pendant ce temps là, les physiciens étaient assez contents : quand on a un phénomène naturel, on met en équations, (on *modélise*) puis on a des processus de résolution. Si on ne sait pas résoudre les équations, on linéarise ou on numérise. L'ordinateur se charge alors du reste, besogneuse cuisine numérique indigeste, infaisable "à la main".

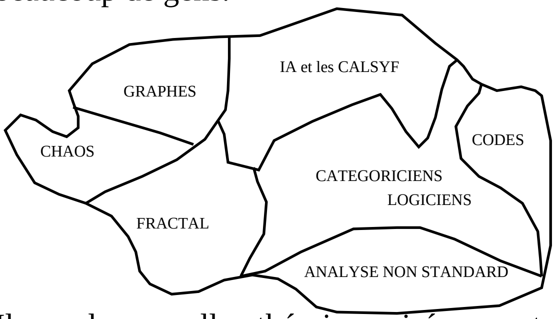
J'ai dit "assez contents" car en fait il reste des problèmes qu'on n'arrive pas à résoudre ou même simplement qu'on ne sait pas ou qu'on ne peut pas mettre en équations. Bref, on en est à peu près là, avec un développement technique faramineux.

Et puis ici j'ai mis l'enseignement en biais :



L'enseignement est toujours un peu marginal, et un petit peu en retard sur l'évolution des sciences. On a eu droit aux maths modernes, et quand on s'est aperçu qu'il y avait des problèmes, il y a eu une volte-face. Et maintenant, on a droit à la quincaillerie : vous avez des outils dans tous les sens, la notion de raisonnement, vue comme le ciment fondamental des mathématiques il y a 20 ans, disparaît un peu, on ne sait plus bien trop où on en est. Il y a un certain malaise, c'est clair, car il n'y a plus de repère.

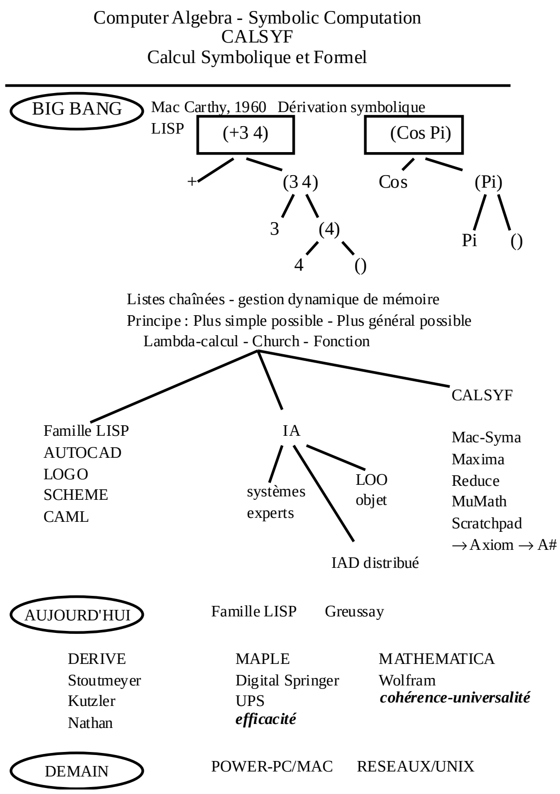
Scientifiquement, on a maintenant une période complètement chaotique, qui fait peur à beaucoup de gens.



Il y a de nouvelles théories qui émergent de partout : la théorie du chaos, des sytèmes dynamiques, les fractals, la théorie des graphes, l'intelligence artificielle et les calculs symboliques et formels, les catégories, les logiques non classiques, les nouvelles théories des codes, l'analyse non-standard et j'en passe.

Ça semble partir dans tous les sens, souvent en dehors de la théorie des ensembles et on n'y voit plus trop clair, même si techniquement, l'arsenal mathématique et informatique manipulé laisse rêveur.

• *l'informatique symbolique et formelle*



Le Big Bang dans cette affaire vient de Mac Carthy, qui a inventé le langage de programmation Lisp pour faire de la dérivation symbolique.

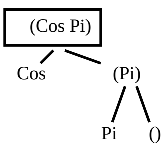
Pour les tout-petits, qui ne savent pas ce que c'est qu'une dérivée ... Vous devez commencer à avoir conscience que la notion de fonction est fondamentale. (Il y a eu des exposés sur cette notion de fonction.) Quand un mathématicien veut étudier une fonction, il peut regarder comment elle agit de près, mais il y a aussi une autre façon de faire qui consiste à se dire : je vais aller voir le petit frère, et avec le petit frère je vais essayer de trouver des renseignements sur le grand frère. C'est pourquoi à une fonction, on associe sa dérivée et on va voir cette dérivée. C'est parfois plus facile qu'avec la fonction et on obtient souvent ainsi des renseignements intéressants sur la fonction. C'est ce qui a donné naissance à toute une partie des mathématiques : le calcul différentiel.

La puissance de Lisp vient de la représentation très simple des objets du calcul, en particulier des fonctions, ce qui permet une gestion dynamique et automatique de la mémoire de l'ordinateur.

les avantages de la représentation "Lisp"

C'est très simple : quand on ouvre une parenthèse, cela veut dire qu'on va appliquer une fonction. Le symbole qui vient ensuite porte toutes les propriétés de cette fonction. Ensuite on écrit les éléments sur lesquels s'appliquent cette fonction. Ainsi, par exemple, (+ 3 4) représente 3 + 4.

Ce formalisme :
• est complètement général : si vous voulez cos π, vous écrirez : parenthèse (c'est-à-dire : bonjour), le nom de la fonction, et puis tout le reste.



• il permet aux fonctions de s'appliquer sur autant d'éléments que l'on veut ;
• il permet de composer facilement les fonctions.

Au point de vue interne, il n'y a pas d'histoire de «case mémoire», où on mettrait des choses, « écrasées » ensuite. Le système gère seulement des liens.Ainsi, quand l'interprète Lisp trouve ce (+ 3 4), il se dit :

- une parenthèse ? Attention, derrière c'est une fonction,
- la fonction c'est quoi ?
- c'est +, ok
- et puis la suite c'est quoi ?

Ok, ça veut dire qu'il va voir quelles sont les propriétés de +, ce qui est symbolisé sur le schéma général par un trait allant vers +.

Puis il s'intéresse à ce qui reste dans l'expression du calcul (ici 3 4), et puis là il recommence et il se dit :

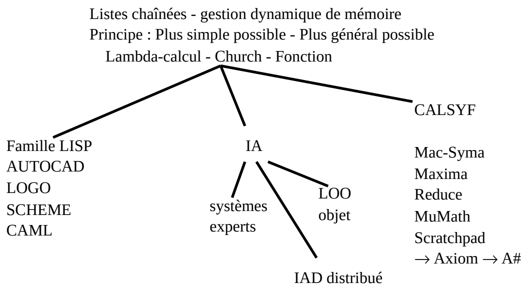
- tiens, le premier terme c'est 3, je le mets de côté et je le rajouterai à ce que j'aurais trouvé,
- il reste 4, qu'il met de côté et il continue,
- et puis là, mais j'ai, j'ai, j'ai vide !

alors il s'arrête et ajoute tous les éléments laissés de côté. Et vous voyez le vide des matheux qui réapparaît là, comme par hasard. On voit tout de suite apparaître des arbres et comme on compose des fonctions, des multitudes de parenthèses.

Les gens ont dit que c'était farfelu. D'abord ce n'était pas la notation normale et puis : « qui est-ce qui va aller écrire ça comme ça ? » (Les gens avaient tout à fait raison, ce n'est pas la notation normale.) Et puis, quand on compose les fonctions, ça donne des trucs énormes, pas très maîtrisables (pensait-on). Mais il y a quand-même eu des "fous", des chercheurs qui ont continué à travailler dans cette direction.

Evidemment, comme les choses se compliquent et se construisent, comme en mathématiques, le principe fondamental dans ce style de programmation est : *faire le plus simple possible et le plus général possible.*

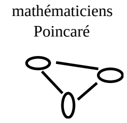
Parallèlement, dans le sillage d'un mathématicien, Church, des mathématiciens ont bâti une théorie : le *lambda-calcul*. Dans cette théorie, qui n'entre pas dans le cadre de la théorie des ensembles, tout calcul s'exprime par l'application d'une fonction. Il y a eu toute une osmose entre les lispiens et cette théorie mathématique et cela a donné naissance à 3 grandes directions :



• Les personnes qui ont travaillé sur les langages de la famille LISP, par exemple :
… AUTOCAD, écrit en AUTOLISP
… LOGO : dans le monde éducatif,
… SCHEME dans les universités,
… CAML etc.

• Les chercheurs en IA (IA signifie *intelligen - ce artificielle*.) qui ont adopté Lisp comme langue universelle. De leur recherches sont nés :
… les *systèmes experts* : au début adulés, puis décriés, ils sont rentrés dans le rang et rendent maintenant bien des services
… les *langages à objets* (LOO) à la base des Macs et de l'ergonomie Windows et qui pénètre tous les domaines de l'informatique.

Parmi ces chercheurs, plus récemment, une branche s'est développée, appelée l'IAD pour Intelligence Artificielle Distribué. On y parle d'agents, de collaboration, de communication, d'éco-résolution, d'organisation et la solution aux problèmes posés émerge des relations entre agents, les agents pouvant être, entre autres des programmes informatiques. Ici, on ne met plus les problèmes en équation.



Dèjà Poincaré avait pris conscience à la fin du siècle dernier qu'il n'était pas possible de résoudre les équations différentielles qui régissent les relations entre plus de 3 corps par des formules explicites.

• Enfin, dernier groupe, les chercheurs en CALSYF, spécialisés dans l'utilisation de systèmes symboliques pour faire des mathématiques ou spécialisés dans leur fabrication et leur évolution.

Il y a beaucoup de systèmes :
• MacSyma, devenu aussi Maxima pour des raisons commerciales,
• Reduce,
• MuMath,
• Scratchpad, qui est devenu Axiom, et va devenir A# bientôt. Axiom est le plus gros système au monde. Il n'est utilisé que par des spécialistes et ne tourne pas sur micro.
• et de nombreux systèmes spécialisés dans un domaine particulier des mathématiques (théorie des groupes, théorie des nombres etc.)

aujourd'hui

Un certain nombre de ces systèmes sont commercialisés et tournent sur Mac ou PC. Greussay, chef de file de l'école lispienne a formé beaucoup d'élèves, tous plus brillants les uns que les autres. Mais les lispiens sont des gens qui ne se font pas de publicité : c'est un peu comme les matheux "purs" ; aventuriers épris de beauté, ils travaillent beaucoup et y trouvent leur plaisir.

au niveau commercial
(par ordre alphabétique)

Il y a DERIVE.
DERIVE est l'œuvre, principalement, d'un homme qui s'appelle Stoutmeyer (ils étaient-deux en fait). Stoutmeyer était aussi l'auteur

de Reduce et MuMath. Il a aussi travaillé sur Maxima, et il a réussi un exploit : faire entrer un système de calcul formel dans une calculette autorisée au bac (ça vous fait les dérivées, les calculs, vous savez … tous les trucs pénibles). Au niveau européen, il y a une organisation, dirigée par le Professeur Kutzler, en Autriche, et dont le distributeur en France est Edusoft (Nathan logiciel).

Il y a MAPLE.
MAPLE, c'est autre chose. Avec le développement de l'informatique, il est arrivé un moment où des gens se sont dit que l'informatique avait fait des progrès et qu'il était temps de faire des produits qui tiennent compte de l'évolution des choses. C'était en 1980. Des Canadiens, des Américains, des Suisses et aussi des gens de l'INRIA (l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique), ont travaillé sur ce produit. L'idée directrice est l'efficacité.

Il y a MATHEMATICA
Petit dernier de la famille, MATHEMATICA est au départ, l'œuvre d'un seul homme : S. Wolfram, physicien. C'est un physicien qui est assez près de ce qui se fait en IA distribué. Il a écrit son premier article international à 16 ans, et a terminé sa thèse à 20 ans. Maintenant il a une compagnie de 200 personnes et il est aussi professeur à l'université. Ecrit au départ pour les propres besoins de S. Wolfram, Mathematica repose sur une grande cohérence et c'est le premier système visant à être universel. On y calcule ; on représente courbes et surfaces ; on le programme et on s'en sert comme d'un traitement de textes.

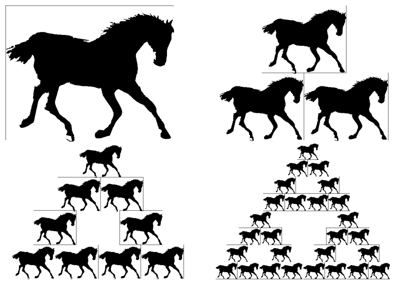
demain : à quoi faut-il s'attendre ?

Il y a deux directions qui sont en fait très liées : les power-pc/mac à processeur Risk, et les réseaux sous Unix. Les réseaux sous Unix, dont le plus connu est Internet, sont des cavernes d'Ali Baba où le monde est à portée de souris. Mais organiser un réseau ou le maintenir est une affaire de spécialiste.

Les "petites" machines individuelles, si elles ne permettent pas directement d'explorer le monde entier, sont tout de même plus puissantes que les grosses machines d'hier. Moins surchargées, elles sont plus rapides et n'offrent pas le flanc de l'insécurité. De plus, il n'est pas besoin d'être ingénieur système ou d'y avoir recours, pour travailler les mathématiques.

• un petit exemple

J'ai vu et entendu des élèves qui s'étaient intéressés à des choses comme ça :



C'est tout à fait typique et vous êtes vraiment dans le vent, avec vos chevaux, si j'ose dire.

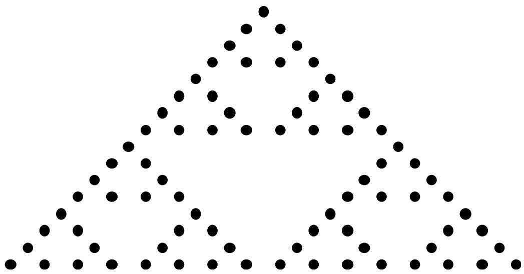
Voilà un exemple de ce qu'on trouve dans un des livres de Wolfram. C'est simplement le triangle de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
etc,

Si vous remplacez tous les coefficients pairs par 0, et tous les impairs par 1, c'est-à-dire, si vous travaillez modulo 2, vous obtenez :

1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
etc,

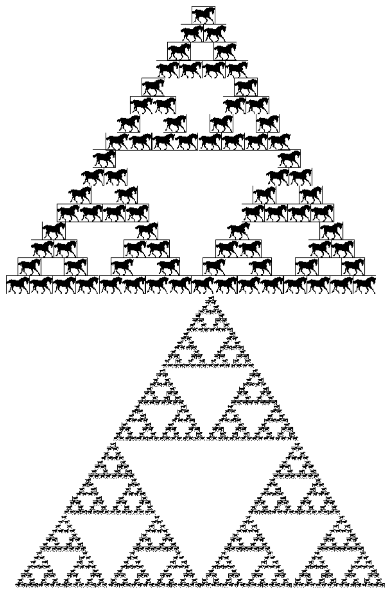
Mais si au lieu de 1 vous faites un gros pâté autour, et si vous avez 0, vous ne mettez rien, et si vous continuez, et vous continuez, alors vous obtenez ce qui est là :



Maintenant si vous travaillez modulo 3 (vous gardez 0, 1 et 2 et par contre 3 vous le remplacez par 0) et si vous adoptez un système de coloriage, vous obtiendrez une autre schématique.

Je ne sais pas pourquoi il n'y a pas 6 et 7 dans le livre de Wolfram, mais il y a 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Vous devriez essayer.

Ce qui est intéressant, c'est que cette schématique est utilisée pour modéliser, d'une certaine façon, des problèmes très difficiles en mécanique des fluides. C'est le dessin qui modélise la situation. C'est ce qui se fait déjà couramment dans le monde industriel, quand on se fait une idée des fonctions solutions d'un problème en regardant leur représentation graphique.



[NDLR : Jacqueline Zizi est l'auteur d'un ouvrage que tous les enseignants de mathématiques devraient avoir lu ; facile et agréable à lire — et que vous ayez ou non accès à un logiciel de calcul formel — il vous permettra de ne pas vous trouver un jour obligé(e) de dire : « je ne savais pas » …

Jacqueline Zizi, *Derive®, Maple® et Mathematica®. Mathématiques, Informatique et Enseignement*, Livre I, Editions du Choix et Editions Archimède, © décembre 1992.

Les livres II et III sont réunis dans un deuxième tome, publié chez les mêmes éditeurs.]