Géométrie, lieu de recherche, son actualité pour l'enseignement

par **Gustave Choquet**,
membre de l'Académie des Sciences, section mathématiques.

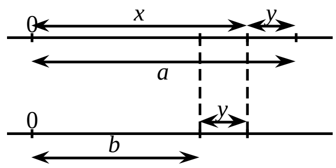
Cette conférence a été donnée le 17 janvier 1995, lors de la première journée du stage organisé en 1994-95 par l'Association MATh.en.JEANS, pour les MAFPEN de Créteil, Paris, Versailles, à l'Académie des Sciences en collaboration avec la cellule de communication pédagogique et culturelle d'icelle.

[Merci à Bernard Beauzamy, responsable de l'*Institut de Calcul Mathématique*, de s'être occupé de faire saisir ce texte.

Merci à l'*Académie des Sciences* qui a accueilli cette journée de stage ; nos remerciements vont plus particulièrement à Gustave Choquet, *Académicien*, qui a accepté avec enthousiasme de participer à cette journée, et à Marie-Thérèse Fouillade, *Chargée de la communication pédagogique et culturelle de l'Académie des Sciences*, qui a participé à la mise au point de cette journée et a su faire en sorte que la journée se déroule bien, de façon très concrète.]

Je parlerai ici de géométrie, et plus précisément de l'esprit géométrique, donc pas seulement de la géométrie d'Euclide et de ses prolongements. Je me considère comme un géomètre, bien que peu de mes recherches concernent ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie. Je tenterai, dans la seconde partie de ma conférence de définir ce qu'est pour moi l'esprit géométrique ; je me contenterai pour l'instant de mon témoignage personnel.

Depuis l'école primaire je crois que cet esprit a coloré toutes mes activités mathématiques ; la première impulsion m'a sans doute été donnée par mon instituteur, un homme remarquable qui, pour nous faire résoudre des problèmes du genre $\{x + y = a \; ; \; x - y = b\}$, nous faisait utiliser le schéma géométrique suivant que je n'ai jamais oublié :



d'où $2y = (a - b)$. Plus tard, au lycée je ne comprenais bien les problèmes sur les trinômes qu'en traçant d'abord leurs graphes. Dès la classe de 1ère j'avais coutume et plaisir, avant de m'endormir, à résoudre de tête des problèmes de géométrie plane ou dans l'espace ; cette gymnastique mentale a beaucoup développé en moi une intuition géométrique qui, je m'en aperçois aujourd'hui, n'est pas universellement développée chez tous les mathématiciens.

Plus tard encore, mes recherches en Analyse, théorie des nombres, en théorie des attracteurs, m'apparaissent aujourd'hui pour la plupart comme des illustrations de ma vision géométrique du monde ; l'une d'elles, en théorie du potentiel n'aurait même pas pu se développer sans une interprétation en terme de géométrie du triangle.

Je me sens très proche d'Henri Lebesgue, le créateur de la théorie de l'intégration ; je le cite : « *Je veux dire ici que toutes mes recherches ont ce caractère commun de procéder d'une vue directe, et en quelque sorte géométrique, des problèmes étudiés.* »

et ailleurs : « *J'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques … ; il me semble que j'ai fait constamment des applications de la géométrie à l'Analyse.* » Lorsqu'il était jeune normalien et qu'on lui enseignait que les surfaces applicables sur le plan sont réglées, il sortait de sa poche un mouchoir ou une feuille de papier chiffonnée et demandait « *Ces surfaces sont-elles réglées ?* » Ce mouchoir fut le point de départ de sa théorie de l'intégration. Plus tard, c'est la vue d'un mur de briques en construction, dans la rue, qui le conduisit à la meilleure définition existante de la dimension d'un continu.

PLAN :

Dans la première partie de cette conférence, je parlerai des programmes actuels, et de leur mise en application dans les manuels de Terracher (chez Hachette), afin de montrer, de façon palpable, les manquements à l'esprit géométrique, et leurs conséquences regrettables. Dans la seconde partie, je parlerai de l'esprit géométrique et de la priorité de cet esprit dans l'éducation.

Ces programmes et manuels suggèrent pour moi les techniques connues en peinture sous le nom de pointillisme, de tachisme, et plus généralement de divisionnisme ; mais le succès de ces techniques en peinture n'a pas d'analogue dans l'enseignement.

Ce divisionnisme me semble avoir pour origine une réaction contre les excès de ce qu'on a appelé « les maths modernes » : excès dans l'utilisation de la théorie des ensembles, de la logique, de l'algèbre et de l'algèbre linéaire ; on évite donc maintenant tout ce qui peut rappeler ces sujets.

Mais comme il faut bien mettre un peu de substance dans les programmes, on y réintroduit un peu de géométrie, à côté de rudiments de probabilités et de combinatoire.

Par ailleurs, programmes et manuels sont pénétrés de l'idée que par souci de rendement, il faut réduire au maximum le cours et toute préoccupation de rigueur : les programmes disent explicitement : « le cours doit être bref » ; et certes il l'est chez Terracher ; on y lit un peu partout « Théorème : *ta ta ta* ; nous admettons ce théorème ; voir activités I et II ». Dans ces manuels, le cours n'est plus que l'une des 6 ou 7 parties qui composent chaque chapitre. Le reste est abondant — ce qui explique par exemple les 600 pages du cours de 1ère S consistant en Introduction et Exercices de niveaux variés d'une très grande richesse, dont il serait intéressant de vérifier l'utilisation par les élèves, sans doute submergés par une trop grande richesse sans véritable fil directeur pour les guider dans cette caverne d'Ali Baba.

Programmes et manuels actuels me font penser à l'abondance d'un genre de publications mathématiques qui se développe actuellement et qui menace peut-être l'évolution de notre discipline ; les Américains l'appellent « Mathématiques molles » ou « Mathématiques théoriques » par analogie avec une certaine « Physique théorique » et ses modes éphémères. Il s'agit par exemple de « Théorèmes d'ordinateur » suggérés par une expérimentation sur des ordinateurs puissants, et que leurs découvreurs annoncent et publient sous le nom de théorèmes, sans spécifier le sens qu'ils attachent à ce mot.

Le développement des communications électroniques risque d'amplifier ce mouvement, dont un protagoniste bien connu est Benoît Mandelbrot qui a soutenu et écrit qu'il était plus important de lancer des idées que de prouver des théorèmes. Je pense que, dans l'enseignement, cette « philosophie », si on peut l'appeler ainsi, est un poison subtil qui aboutirait à ne plus faire des mathématiques une discipline de formation de l'esprit.

EXAMEN DES PROGRAMMES.

Tle, Sciences économiques et sociales : les espaces vectoriels et produit scalaire manquent. Définition artificielle de l'intégrale par primitives.

Tle, Littéraires : Idem pour l'intégrale. On met en garde contre $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ pourtant indispensables à tout homme pour éviter des erreurs de raisonnement : ($A \Rightarrow B_1$ et $A \Rightarrow B_2$) ne veut pas dire $B_1 \Rightarrow A$, ni $B_1 \Rightarrow B_2$

Tle, S : Idem pour l'intégrale et ⇒. Il faudrait définir N (récurrence) et R (suites croissantes majorées). Et définir l'espace, par exemple par R^3 et $\Sigma\, x_i\, y_i$. **Manquent** : groupes (des polygones, isométries et similitudes), l'arithmétique, le pgcd, … **Manquent** : espaces vectoriels et lien avec systèmes linéaires 3-3 et graphes. Inégalités et exemples de programmation linéaire.

Définition archaïque du produit vectoriel.

Les « crimes » de ces programmes :

— Trop grande directivité,
— manque squelette et une assise solide (N et R),
— manque l'utilisation de l'intuition géométrique (primitive et intégrale sans aire),
— pas l'accent sur la rigueur, au moins sur certains points importants,
— on fait parfois compliqué, préhistorique [les vecteurs bâtons ! au lieu d'espace vectoriel (*e.g.* polynômes)].

EXAMEN DES MANUELS : Terracher, Hachette : 1ère S, 600 p, TS, 590 p.

Travail monumental et qui a des qualités (surtout en 1ère), mais écrasant pour élèves.

Uniquement livre du maître (mine d'exercices, mais travail trop bien mâché).

Il renforce, souvent inutilement, les tendances des programmes.

Or *voici des objectifs souhaitables :*

Tout enseignement doit, pour réussir, s'appuyer sur l'acquis des élèves. Dans l'enseignement scientifique cet acquis consiste, à la fois en l'intuition acquise depuis la jeune enfance par les contacts avec le monde extérieur, intuition essentiellement visuelle et manuelle ; et aussi dans les acquis des classes antérieures, acquis souvent encore fragiles.

Mais il faut aussi développer la motivation des élèves ; il faudrait pour cela en découvrir les germes chez chacun d'eux, tâche difficile. Toutefois l'un des ressorts de leur activité est l'utilisation d'outils simples mais efficaces (pensez au tambour, à la trompette, aux allumettes). Programmes et manuels semblent en avoir déduit que l'on pouvait se contenter d'énoncer des théorèmes simples et forts et d'accumuler les exercices où on les utilisera. Encore ne faut-il pas exagérer, surtout lorsque les termes utilisés dans ces théorèmes n'ont pas de contenu intuitif.

Et aussi, à force d'accumuler des théorèmes que l'on admet, la confiance se perd ; et de plus, en général on ne comprend bien le sens d'un théorème qu'en entrant dans le détail de sa démonstration.

Nous allons rencontrer d'ailleurs de nombreux cas où à la fois les notions primitives utilisées sont inutilement compliquées, et où le chemin suivi est plus artificiel que les chemins plus directs que 2 500 ans de recherches mathématiques ont finalement dégagés.

Les programmes insistent sur le fait que tout développement axiomatique doit être exclu ; d'accord ! Mais à force de parler d'êtres dont on n'a jamais dégagé les propriétés intuitives et finalement caractéristiques, le cours de mathématiques apparaît comme une juxtaposition de petits exercices ; alors que sa structure devrait apparaître pour les élèves qui l'ont assimilé comme une architecture solide, élégante parce que simple et nécessaire. Ce n'est pas le cas ; en voici des illustrations :

• N : Il n'est pas compliqué d'énoncer la propriété suivante (qui base le raisonnement par récurrence) : « Toute partie X de N qui contient p et qui contient $(n+1)$ dès qu'elle contient n, contient aussi tous les entiers $\geq p$ ».

• R : Le cours étudie les limites de suites et la continuité des fonctions sans jamais énoncer la propriété suivante, fondement de l'étude des limites et des fonctions continues : « Toute suite croissante majorée (x_n) de nombres réels a une limite ».

• *Vecteurs et barycentres* :

Il y a plus d'un siècle, vers 1880, Péano dégageait la notion d'espace vectoriel ; on continua pourtant un peu partout à définir un vecteur comme un segment de droite de longueur, direction et sens donnés. Cette définition archaïque, et compliquée qui occulte la généralité et la souplesse de la notion de vecteur est celle des manuels examinés. Les élèves doivent prendre conscience qu'un vecteur n'est autre chose qu'un point d'un espace vectoriel (espace de polynômes, par ex).

D'autre part le manuel met l'accent sur une définition lourde des barycentres alors que la notion importante et simple est celle de résultante d'un ensemble fini de points affectés d'un coefficient : $\Sigma\, \alpha_i\, x_i$.

D'où des complications sans fin, et des manques de généralité (ex: formule de Leibniz concernant $\Sigma\alpha_i\, (x_i\text{-}\alpha_i\,)^2$ avec ses lignes et surfaces de niveau).

• *Angles orientés* :

Pourquoi les monter en épingle, ainsi que la « cocyclicité » ! alors que dans R^3, cette notion n'a plus de sens.

En fait, l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans angles.

• *Produit scalaire* :
Après son introduction (avec projection $\perp$), expliciter sa caractérisation : bilinéaire, symétrique, et $a.a > 0$ si $a \neq 0$. Tout le reste s'en suit (*e.g.* $| x.y | \leq \|x\| \,.\, \|y\|$).

• *Transformations* :
Pourquoi se borner à transformer cercles et droites ? Et aussi pourquoi ne pas traiter l'inversion en exercice ?

• *L'espace* n'est finalement pas défini ; l'expliciter, par exemple avec R^3 et son produit scalaire. Les sphères devraient être étudiées (longitude, latitude, et $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi$ = aire).

• *Analyse* :
— Problèmes du 2ème degré : et lien avec les graphes ? et les inégalités, la programmation linéaire ?
— limites de suites : le faire avant continuité des fonctions.
— dérivation : contre-exemple |x| ; démontrer que sin x/x $\to$ 1 avec triangles et aire.
— suites arithmétiques et géométriques : comme préparation aux logarithmes.

• *Systèmes linéaires* :
Pourquoi pas d'espace vectoriel, pas de déterminant (2ème ordre), pas d'interprétation par les graphes associés ?

• C : Pourquoi l'admettre au lieu de le construire avec les règles connues et interprétation par R^2 ?

• *Continuité de f* :
Ne pas l'identifier avec possibilité de tracer son graphe !

• *Dérivation* :
Pourquoi ne pas démontrer $(u\text{o}v)'=u'\,(v)\times v'$: facile ! Pourquoi ne pas admettre Rolle, d'où accroissements finis ?

• *Primitive ch 5, Intégrale ch 9.*
C'est un scandale, alors qu'en admettant l'additivité des aires, on peut tout démontrer.

• *Log et exponentielle*.
A traiter ensemble, après introduction avec les suites arithmétiques et géométriques.

• *Suites numériques* :
A placer avant étude des fonctions, puis y revenir pour comparaison avec l'intégrale des fonctions. Ne pas mélanger avec notion de suites récurrentes.

• *Variation des fonctions* :
Facile avec formule des accroissements finis.

• *Isométries* :
Etude lourde ; commencer par symétrie/axe des *x* ou O puis produit de 2 symétries ; puis prolongement d'une isométrie de *X* contenu dans le plan. Souligner structure de groupe, sous-groupe ; groupe d'un polygone ou polyèdre.

• *Similitudes* :
Mauvaise définition des similitudes directes (angles plus dilatation) puisque impossible dans R^3. Pour les similitudes directes dans R, utiliser C.

• *Courbes planes* :
Et les coordonnées polaires ? Et longitude, latitude de la sphère ? Paramétrisation rationnelle du cercle et coniques.

• *Coniques* :
Et l'aire des ellipses ? Et les images affines des coniques ?

• *Produit vectoriel*, à définir dans R^3 comme application bilinéaire, antisymétrique, de $R^3 \times R^3$ dans R^3 telle que $u \wedge v = w$, $v \wedge w = u$, $w \wedge u = v$.

Conclusion de cet examen des manuels.

Malgré l'abondance des pages et exercices (même pittoresques), les élèves restent sous-alimentés, et les professeurs sont inhibés parce qu'on leur mâche le travail ; on en fait des exécutants sans initiative : par exemple une introduction à un thème nouveau doit être un échange prof-élèves ; le manuel tue cet échange.

— trop d'énoncés admis sans raison valable,

— squelette invisible, désarticulé,

— c'est du pointillisme.

Et le manuel, complexe, dont le cours est insuffisant, aux exercices trop riches, n'est pas utilisable par les élèves. Seulement livre du maître, à utiliser avec précaution par ces maîtres.

L'IDEE GEOMETRIQUE INTERIEURE.

Je viens de faire un examen critique des programmes et manuels de 1ère et Terminale S tout en esquissant brièvement une présentation plus conforme à ce que j'ai appelé l'esprit géométrique. Il est temps maintenant de préciser cette notion ; je tenterai aussi d'évoquer ses liens avec ce qu'on pourrait appeler un comportement stratégique.

Etymologiquement, la géométrie signifie la mesure de la Terre ; les Grecs y adjoignaient l'étude des outils, méthodes, figures indispensables ou suggérés pour et par cette mesure. Cet édifice conceptuel synthétisé par Euclide s'identifiait pour eux à l'ensemble des mathématiques : souvenons-nous de la mise en garde « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre ».

Pour nous la Terre est remplacée par l'univers des choses visibles ou invisibles, infiniment petites ou infiniment lointaines, et sa mesure est devenue le réseau complexe des outils de pensée et d'observation que nous divisons assez artificiellement en mathématique, physique et chimie, biologie. Mais s'il est vrai comme l'ont bien souligné les géomètres Georges Reeb et Georges Harthong, qu'à la base de l'œuvre de chaque chercheur scientifique, il y a une « idée intérieure » plus ou moins consciente qui, après coup explique le choix de ses sujets de recherche et sa façon de les aborder, je voudrais rechercher d'abord ce qui fait qu'un mathématicien peut être qualifié de géomètre plutôt que d'algébriste ou de combinatoriste.

Son idée intérieure n'est pas une propriété de l'objet qu'il étudie, mais sa façon de choisir la facette à étudier dans cet objet. C'est aussi un sentiment personnel qui lui permet d'attacher à certaines définitions, théorèmes ou structures, le qualificatif de beau.

Son œuvre en sera imprégnée — du moins tant qu'il conservera son indépendance et se gardera de suivre la mode.

J'ai déjà souligné que l'idée intérieure de Lebesgue était géométrique ; c'est également mon cas, et si j'ai pu résoudre certains problèmes d'analyse qui avaient jusque-là résisté aux efforts d'autres mathématiciens, ce fut en les attaquant d'une manière géométrique (*e.g.* la totalisation d'une dérivée $df/d\alpha$ où α est continue quelconque).

Cette façon d'aborder les problèmes d'analyse n'est pas universelle ; Laurent Schwartz, dont l'œuvre est pourtant presque entièrement en analyse n'a pas, de son propre aveu, d'intuition géométrique ; mon ancien élève, Michel Talagrand, lui aussi un analyste, a manifesté dans ses premières recherches des dons remarquables de géomètre, puis il a progressivement pris conscience que sa véritable idée intérieure était la combinatoire ; cette prise de conscience a, bien sûr, infléchi la direction de ses recherches.

Paradoxalement le fait de réussir brillamment dans ce qu'on appelle aujourd'hui géométrie, par exemple l'étude des variétés différentiables, n'implique pas toujours qu'on ait une idée intérieure géométrique : c'est le cas d'André Lichnerovicz, spécialiste des variétés différentiables ; son idée intérieure est une sorte d'algèbre, un sens très développé des combinaisons algébriques de tenseurs à effectuer pour progresser ; « il sait calculer » dit-on de lui.

Pour moi, en conclusion, un géomètre est un chercheur (mathématicien ou même physicien) dont l'idée intérieure est géométrique. Il me faut donc préciser ce que j'entends par « idée intérieure géométrique », ce qui me ramènera à notre préoccupation commune : quelle sorte d'enseignement donner à nos élèves ?

Tous les hommes sont différents, par leurs gènes d'abord, puis par l'environnement où ils ont été plongés, d'abord familial puis plus largement social. Mais l'existence de cette diversité ne saurait exiger d'un éducateur qu'il la connaisse et en tienne compte étroitement : par l'ignorance d'abord, de ces différences, mais aussi parce qu'il est confronté au difficile problème d'enseigner, non pas à un seul élève, mais à une classe nombreuse.

Il ne peut donc s'appuyer que sur ce que je considère comme des faits établis : à savoir que les enfants arrivent au collège avec une vaste expérience du monde sensible, acquise par la vue d'abord, puis par le toucher, la manipulation d'objets : roues de vélo, mouvement alternatif des pistons, tiroirs, rotation d'une porte autour de ses gonds, vitesse des engins mécaniques, etc… . Ils ont donc acquis une intuition du concret, en partie consciente, et en plus grande partie subconsciente.

L'enseignant doit impérativement baser son enseignement sur cet acquis sensible, et progressivement faire passer ce qui est jusque-là subconscient au niveau de la conscience : cette traduction ne peut réussir que par un dialogue entre le professeur et sa classe. Il s'agit pour l'essentiel de l'enseignement d'une langue nouvelle ; il s'agira tantôt de la traduction de la langue courante imprécise dans une langue mathématique précise, tantôt même de l'apprentissage d'un vocabulaire entièrement nouveau permettant l'accès à l'intuition acquise de l'élève. Je veux ici souligner que, comme dans tout apprentissage d'une langue, il est impératif que chaque élève apprenne à s'exprimer dans la nouvelle langue, à le faire oralement et par écrit : ce ne sont pas les discours, aussi clairs soient-ils, du professeur, qui peuvent remplacer ce travail individuel .

Le meilleur professeur n'est pas celui qui travaille le plus, mais celui qui parvient à faire travailler ses élèves. Il ne doit pas être celui qui sait et tente de déverser ce qu'il sait dans le cerveau de ses élèves, mais celui qui, par le dialogue parvient à découvrir ce qu'ils savent, à leur en faire prendre conscience, puis partir de cet acquis, et le préciser pour s'y appuyer et aller plus loin.

Je viens, en apparence, de m'éloigner de mon objectif qui était de définir l'esprit géométrique ; mais notre préoccupation commune est l'enseignement des mathématiques ; et je crois que jusqu'à l'adolescence, l'idée intérieure de nos élèves, s'est développée essentiellement par la vue et le toucher, et qu'elle est donc géométrique (il y a certes des exceptions, comme ces jeunes paysans calculateurs prodiges dont l'idée intérieure, précise et tyrannique, est arithmétique ; mais ces cas sont rares).

Ce n'est que plus tard que l'idée intérieure peut s'orienter différemment, pour devenir par exemple algébrique ou combinatoire. Je pense que l'échec des « Maths modernes » a pour explication principale l'oubli de cette observation de bon sens, à savoir : l'idée intérieure des enfants et adolescents est presque toujours de nature géométrique.

Certes, au-delà de l'adolescence, et surtout au niveau de la recherche, l'algèbre n'a plus rien à envier à la géométrie : souvenons nous de Galois, d'Abel.

Aussi l'algèbre et l'algèbre linéaire devraient, me semble-t-il, être réhabilitées modérément dans nos programmes et construire une base solide pour la formation mathématique de nos élèves, surtout si l'on se souvient que via la géométrie analytique de Descartes, les algèbres constituent une voie royale pour l'étude de la géométrie d'Euclide dans R^2, R^3, R^n.

Mais plusieurs arguments de poids ont conduit avec raison à une levée de boucliers contre les excès algébriques :

— D'abord ce que j'appellerai un « crime contre l'esprit » consistant en la mise au rancard de l'intuition géométrique des élèves.

— La protestation unanime des physiciens et ingénieurs devant l'abandon de la structure

métrique de l'espace (avec ses règles et équerres, ses roues et ses boules).
— L'algèbre linéaire, facile et même formatrice lorsqu'il ne s'agit que des premières définitions et leurs conséquences immédiates, devient vite difficile et perd tout contact avec l'intuition géométrique dès qu'on la développe un peu. Autrement dit, les exercices y sont soit trop faciles, soit trop difficiles.
— L'algèbre élémentaire : polynômes, fractions rationnelles, consiste en manipulations de type algorithmique, du genre de celles qu'effectue merveilleusement un logiciel tel que Macsyma. Mais comme en algèbre linéaire, dès qu'on quitte ce niveau algorithmique, qui n'exige de nos élèves qu'un peu de mémoire et du soin, on arrive aussitôt à des structures complexes. Ici encore, en algè-bre c'est « tout facile » ou « tout difficile ».

Si nous ne nous résignons pas à faire de nos élèves de simples robots calculateurs, nous ne pouvons donc prendre ni l'algèbre, ni l'algèbre linéaire comme moyen d'accès principal à la formation mathématique.

Je voudrais enfin dire quelques mots des rudiments de théorie des ensembles qu'il faudrait mettre explicitement dans notre enseignement.

a) La notion d'ensemble fini (par bijection avec un segment $[0, n]$ de N).
b) Les relations d'ordre partiel et d'ordre total (elles s'imposent dans toutes les terminales, ne serait-ce que pour faire échec à cette idée que les hommes sont comparables).
c) Les relations d'équivalence sur un ensemble.

Ces notions existent à l'état imprécis dans toute intuition géométrique ; mais il a fallu 2 500 ans pour les dégager ; ne perdons pas le bénéfice de cette découverte.

d) Enfin la structure de groupe, elle aussi fait partie du bagage géométrique intuitif de nos élèves. Avec précaution il serait donc bien de la souligner à l'occasion de l'étude des isométries et des similitudes (de R^2, R^3 euclidien, des polynômes, polyèdres, cercles, sphères).

Et maintenant voici plusieurs notions fondamentales liées à toute activité mentale, et en particulier à celle du chercheur, à quelque niveau que ce soit :

Intuition, subconscient, illumination, idée intérieure. Stratégie et tactique ; modèles visuels ou algébriques. Compatibilité avec rigueur.

Nos sens, notre vie de relation avec notre entourage, accumulent dans notre cerveau, suivant un processus qu'on commence seulement à deviner, des données, des relations entre ces données, qui restructurent le cerveau ; ce travail ne parvient que très rarement à notre conscience.

Mais parfois, ce **subconscient**, à l'occasion d'une stimulation extérieure ou parce que le lent travail du subconscient vient de parvenir à un état stable, arrive l'**illumination** : « j'ai compris ! » dit alors subitement un élève ; instant émouvant (élèves, Poincaré). Cela peut et doit se produire chez des élèves attentifs (d'où l'importance de la motivation).

Ce qu'on nomme l'**intuition**, est facilité par des dons génétiques, mais aussi par une multitude d'observations variées orientées dans une même direction. Exemples : l'« herbier de Glaeser », mon activité géométrique dans l'obscurité, l'intuition des diseuses de bonne aventure, faite d'une multitude de contacts avec les clients.

L'**idée intérieure** me semble être une intuition qui a progressivement coloré, voire envahi le subconscient et même le conscient (dans la famille Kennedy, la fascination du pouvoir présidentiel). Ce sont les individus qui ont une idée intérieure puissante qui réalisent des exploits inimaginables pour l'homo-sapiens moyen.

Stratégie et tactique. Leurs définitions : ce sont deux façons différentes d'aborder les situations. Une caricature de la tactique :

l'algorithmique. Exemple : usage d'une carte pour visiter une ville, un labyrinthe, ou application d'un algorithme pour parcourir ce labyrinthe, cette ville. Il existe des mathématiciens stratèges et d'autres tacticiens (et un même chercheur, au sein d'une même recherche peut être successivement l'un et l'autre). La stratégie (qui explore par grandes masses, puis raffine son examen) exige une grande intuition, et une idée intérieure, quelle que soit sa nature (géométrique, algébrique, combinatoire).

Pour notre enseignement.

Enseigner à des voyants est différent d'enseigner à des aveugles. Nous nous placerons dans la situation générale, celle des voyants. Or c'est presque toujours par la vue que l'expérience des enfants s'est faite. Il faut donc développer l'intuition visuelle.

Moyen :

Essentiellement par la géométrie issue du monde physique mais pas seulement la géométrie d'Euclide, ni toujours plane (projectivité, affinité, convexité, droites de l'espace). Leur donner beaucoup d'expérience : non par discours, mais par action personnelle (cf Freinet et son imprimerie).

Apprentissage de la rigueur : par l'algèbre, mais surtout par la géométrie qui peut donner : rigueur, joie de la découverte, de la beauté, applications immédiates (3-4-5) et esprit géométrique. La rigueur exige que les prémices soient solides, d'où caractère néfaste de trop nombreux théorèmes admis.

CONCLUSION.

Pour qu'il n'y ait pas d'exclus de l'éducation, qu'il n'y ait pas, dès l'école primaire une société d'enfants à 2 vitesses, il faut donner dans notre enseignement une base commune à tous les enfants, celle de l'expérience concrète qu'ont déjà acquise les enfants dès l'âge de 7 ans.

C'est une base acquise pour l'essentiel par le témoignage des sens, et surtout la vue, le toucher, qui leur ont révélé à la fois les relations entre objets, leur forme, leur variation et leur dynamisme. Cette expérience a développé dans leur subconscient une intuition de type géométrique qui en fait des stratèges plus que des tacticiens.

Le but des enseignants de maths et physique doit être l'apprentissage d'un langage précis seul capable de préciser les relations enregistrées par le subconscient et, à partir de ces relations précises, d'enseigner la rigueur.

Mais de même que le bagage intuitif initial des élèves s'est construit par une activité personnelle, c'est encore par des activités personnelles, par l'expérimentation liée à des objets, d'abord concrets, puis de plus en plus abstraits, qu'on peut mathématiser et rendre plus efficaces leurs dons de stratèges.

Nous devons faire de nos élèves, non pas de pâles copies d'ordinateurs, mais des découvreurs.

QUESTIONS : (Je réponds brièvement à trois questions de Pierre Audin)

1° Peut-on se passer d'algèbre et d'algèbre linéaire ?
— J'ai répondu « non » dans ma conférence ; mais il faut se souvenir qu'avant tout un vecteur est un point d'un espace vectoriel ! Et surtout ne pas retomber dans les excès des maths modernes.

2° La géométrie est-elle le bon moyen pour apprendre la rigueur ?
— L'algèbre aussi fournit de tels moyens, par exemple la discussion rigoureuse du système $ax + by = c$; $a'x + b'y = c'$, à paramètres littéraux. Mais la géométrie a le grand avantage supplémentaire d'initier à la recherche, et de baser la découverte sur l'utilisation de l'intuition géométrique : intuition qui conduit à pressentir la solution, puis enfin rigueur.

3° Adaptation de la géométrie à la vie et aux problèmes du 21ème siècle.
— J'ai répondu en partie, à propos de l'esprit géométrique et de la stratégie. Voir à ce sujet le dernier livre de P. Gilles de Gennes sur les objets fragiles.