Kangourou en Jeans 1995 - Lycées

par Pierre Duchet

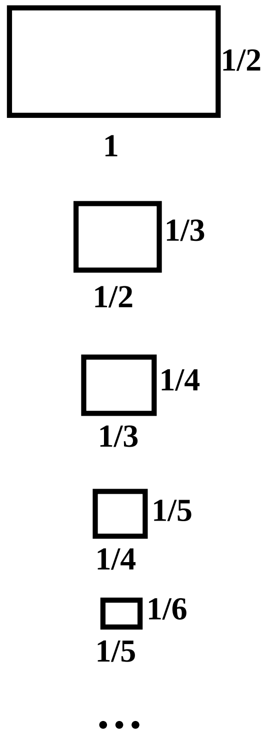
Les Kangourous (Lycées & Collèges) se sont associés en 1995 à MATh.en.JEANS pour permettre à tous de goûter les affres et les joies de la recherche mathématique.

L'idée est de permettre à ceux qui le souhaitent de ne pas attendre la date du concours Kangourou du printemps et d'en profiter pour s'exercer à la réflexion mathématique. Des problèmes véritablement ouverts (= dont les mathématiciens n'ont pas de solution satisfaisante), admettant des réponses aisément évaluables (du type “record”), furent ainsi lancés à la Toussaint 94 dans les lycées et collèges participant à Kangourou.

Pour chaque cycle, deux sujets furent proposés, l'un essentiellement numérique, l'autre plutôt géométrique.

Les sujets pour lycéens avaient une tonalité combinatoire évidente.

Thème n° 1—Un carré pour des rectangles

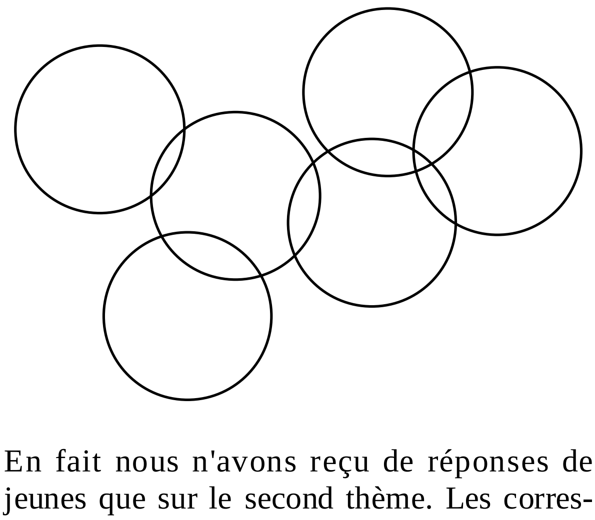


Ces rectangles peuvent-ils tenir dans un carré de côté 1 ?

Le chevauchement est interdit.

Thème n° 2—Un rond à couvrir

Comment disposer des disques identiques de manière à couvrir une aire circulaire maximum. Ici (contrairement au problème précédent) le recouvrement des disques est permis. Le Kangourou en jeans proposait d'étudier le cas de 6 disques.



En fait nous n'avons reçu de réponses de jeunes que sur le second thème. Les correspondants Kangourou l'ont-ils préféré ou s'agit-il d'un choix des jeunes eux-mêmes ? Nous l'ignorons. Peut-être la présentation qui en a été donnée (par Jean-Pierre Boudine et moi-même) y fut-elle pour quelque chose …

Présentation des sujets de Lycées

[…] L'équipe de MATh.en.JEANS et celle du Kangourou des lycées vous proposent — pour passer l'hiver — (le Jeu-Concours Kangourou aura lieu le 25 mars 95) une expérience originale, Kangourou en Jeans ! Il s'agit de proposer à ceux de vos élèves qui seront volontaires l'un des deux thèmes de recherche suivants. Ce sont des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution générale.

Par exemple, pour le premier, le fait que la série de terme général $1/n(n+1)$ converge vers 1 ne permet pas de savoir s'il est effectivement possible de ranger tous les rectangles d'aire $1/n(n+1)$ dans un carré de côté 1. Et encore moins de savoir comment les ranger. Sur ce point les mathématiciens ne sont pas d'accord. Il est souhaitable que les élèves sachent que les mathématiciens n'ont pas de solution.

Pour le second, le problème à n pièces est ouvert. Une solution démontrée d'optimum n'existe que pour de très rares cas de valeurs de n.

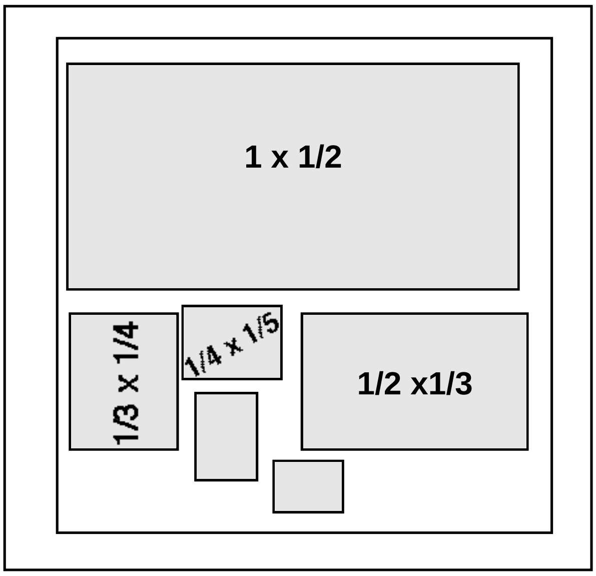
Règle du jeu :

On demande à l'élève un nombre, et la capacité de prouver que ce nombre est effectivement atteint. Un peu de contexte peut leur être signalé, par exemple le fait que $1/n(n+1)=(1/n)–(1/n+1)$ ou le fait qu'on ne couvre pas davantage avec deux disques qu'avec un seul.

Les élèves qui désireront concourir devront envoyer leur copie, comprenant le nombre et au moins une esquisse de justification que ce nombre est atteint, avant le 15 janvier 95. […] Si le nombre annoncé est intéressant, et la justification suffisante, ils seront invités à venir défendre leur performance, fin février. Les vainqueurs seront alors invités dans un congrès avec des mathématiciens. Leur contribution sera publiée dans différentes revues de mathématiques.

Problème 1

On souhaite ranger les rectangles de dimensions 1 et 1/2 ; 1/2 et 1/3 ; 1/3 et 1/4, etc. jusqu'à 1/1994 et 1/1995, dans un carré le plus petit possible.

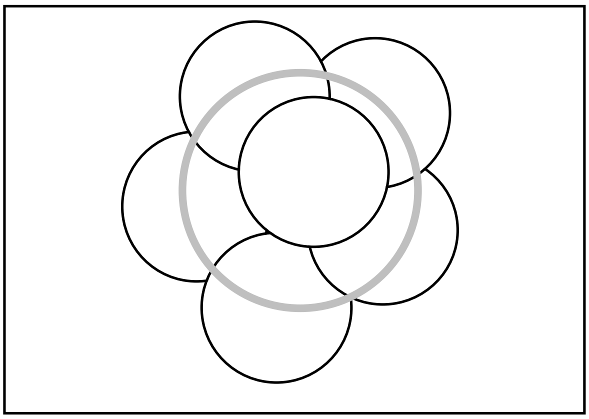


Nombre demandé : le côté du carré.

(Voir résultats pages 129-130.)

Problème 2

On souhaite couvrir avec six disques de rayon 1 un disque de rayon le plus grand possible.



Nombre demandé : le rayon du cercle couvert.

(Voir résultats pages suivantes.)

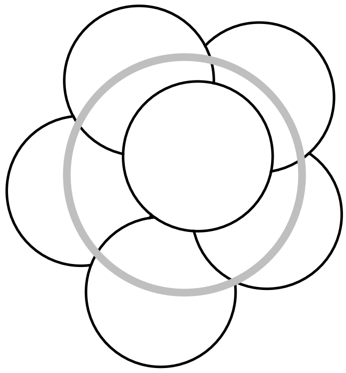
un rond à couvrir

par Pierre Duchet

(sur le Problème 2 du Concours Kangourou en Jeans 1995 - Lycées)

Il s'agit de couvrir avec 6 disques de rayon 1 un disque de rayon le plus grand possible.

?



[NDLR : Le problème de couverture d'un disque circulaire par des disques égaux a été également traité dans le cadre de MATh.en.JEANS (voir pages suivantes). On s'aperçoit que la recherche s'est confinée à celle de solutions très symétriques, tant il paraît extraordinaire que la couverture optimale d'une forme aussi symétrique qu'un disque circulaire puisse être réalisée autrement …

le problème

Le problème de recouvrir complètement une région circulaire en plaçant dessus, successivement, n disques circulaires plus petits et égaux entre eux est, pour n = 5 un petit casse-tête familier des amateurs de fêtes foraines du siècle dernier (j'ai encore rencontré ce jeu en 1962). Les cas de n = 2, 3, 4 ou 7 disques sont assez facile (les réponses données dans les pages suivantes sont optimales).

Le jeu peut être réussi dès que le rayon des petits disques dépasse 0,609383…, le rapport entre le rayon du disque couvert et celui des disques couvrant étant alors de 1,641004…, ainsi que l'a montré Neville en 1915 [2] (comparez avec les solutions proposées pages 28, 32 et 34). K. Bezdeck, spécialiste hongrois du problème, a publié les configurations optimales pour 5 et 6 disques [1] et les a déterminées pour 8 et 9 disques.

Au delà, la question est ouverte …

Les réponses au concours

Le nombre demandé était le rayon du plus grand disque couvert par 6 disques de rayon 1. Sur 9 réponses, 6 ont proposé le nombre

$$\boldsymbol{R_{max}=1,7952814749\ldots}$$

qui est plus précisément égal à

$$\sqrt{\frac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}+2\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+(1+\sqrt{4\sqrt{3}-3})^2}$$

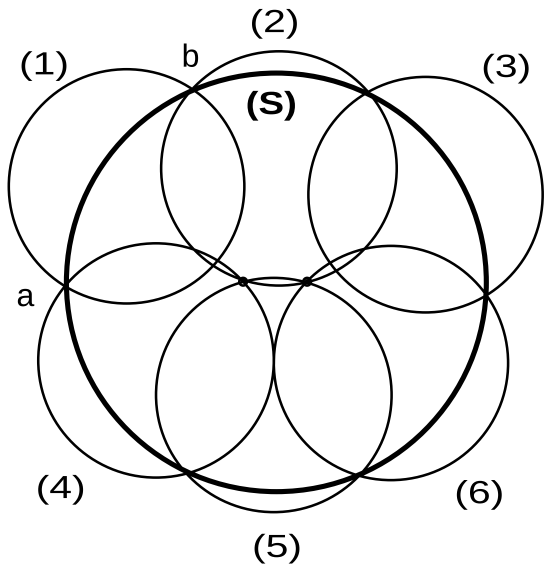
Voir la figure correspondante page 33.

Lauréats

• Harry Szovik (Lycée Français de Budapest)
• Perraud Maillard (27400 Pinterville)
• Arnaud Espanel & David Auboug (33600 Pessac & 33200 Bordeaux)
• Jean-Marc Berrou (1°S, 27400 Louviers)
• David le Touzé (TS 60000 Beauvais)
• Sylvie Soria, Frédéric Mollard & Céline Bernard-Graille (TS, 38500 Voiron)

L'optimum

On peut faire légèrement mieux que la solution proposée ci-dessus. Avec la configuration suivante, obtenue avec Cabri-géomètre®



on obtient

$$\boldsymbol{R_{max} = 1,796\,416\,715\ldots}$$

La figure ci-dessus est symétrique par rapport à un axe vertical, les cercles (3), (4), (5) sont concourants. Le segment [*ab*] est un diamètre du cercle (1). Les cercles (4) et (6) sont presques tangents mais pas exactement. Pour plus de détails voir [1].

Références

[1] K. Bezdeck, *Über einige optimale Konfigurationen von Kreisen*, Ann. univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 27, 1984, 143-151; **MR 87f** : 52020.

[2] E. H. Neville, *Solutions of numerical functional equations*, Proc. London Math. Soc. (2)14, 1915, 308-326.

[NDLR—L'existence d'une configuration optimale pour ce genre de problème n'est pas évidente ; elle résulte de résultats de base en topologie (compacité) et d'un paramétrage correct des configurations recouvrant un disque donné, qui est en effet “compact” …]