histoire de disques

par Cécile Dumarchez, Stéphanie Gagnaire, Véronique Gales, élèves de 1° S1 (module 94-95) du lycée Pablo Neruda de Saint-Martin-d'Hères (38)

enseignant : M. Jean-Claude Oriol

chercheur : M. Charles Payan, CNRS/LSD2

sujet : Quelle est la plus grande surface circulaire que l'on peut recouvrir avec des disques de même diamètre ?

A l'attention du groupe n°43 Argenteuil
parrains du groupe n°19 Grenoble :
Disques à couvrir
Lycée : Pablo Neruda de St Martin d'Hères (Isère)
Sujet : comment faut-il positionner des cercles de bases de même diamètre pour obtenir une surface circulaire pleine maximale ?

Compte-rendu du groupe disque à recouvrir (Grenoble 1)
Il s'agissait de couvrir le plus grand disque possible avec 5 ou 6 disques de même rayon.
L'exposé était clair et compréhensible.
L'idée de base est de partir avec des figures géométriques régulières, pentagone, hexagone, carré et triangle équilatéral.
Ils ont trouvé différentes formules comme :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$

$$y' = \cos 36° + (2x\cos 2\times 36° - 2x)/2\sqrt{(x^2\cos^2 36° - x^2 + 1)}.$$

En disposant 6 cercles à partir d'un hexagone de façon qu'ils convergent en un point, d'après le théorème d'Al Kashi, ils ont trouvé un disque de rayon 1,732.
fait par le groupe empilement de sphères, Argenteuil
responsable du groupe : Desenne Aurélie

Compte-rendu de parrainage de Rouen — Présentation ***Sujet : disque à recouvrir — Ce sujet est présenté par des élèves de 2nde du lycée Pablo Neruda de Grenoble. (fait par le n° 41)***
$R = 2\cos 360°/2n$
Si $n = 3 \Rightarrow R = 1$; si $n = 4 \Rightarrow R = \sqrt{2}$
$x = R$ des cercles de base $y = R$ du cercle recouvert
Formule d'Al Kashi

$$y = x\cos 36° + \sqrt{(x^2\cos^2 36° - x^2 + 1)}.$$

y' dérivé de y

$$y' = \cos 36° + (2x\cos^2 36° - 2x)/[2\sqrt{(x^2\cos^2 36° - x^2 + 1)}].$$

résumés

Le sujet qui nous fut proposé consistait à trouver le plus grand cercle pouvant être recouvert par des disques de même diamètre. Deux problèmes principaux se présentèrent : le nombre de disques à utiliser, et leur disposition.

Notre première idée fut de placer six disques de façon régulière sur les côtés d'un pentagone. Bien que notre étude nous ait prouvé que ce n'était pas là le meilleur moyen, il s'est tout de même révélé très intéressant puisqu'il nous a permis d'obtenir : mise en équation, courbe représentative, formule, etc … Ce qui fut le plus étonnant, c'est qu'à partir d'une idée qui paraît au premier abord évidente voire logique, on puisse aboutir à un raisonnement aussi complet.

The subject we were given consisted in finding the largest circle which could be covered by identical circles. We came up against two problems : how many circles ? and how to arrange them ?

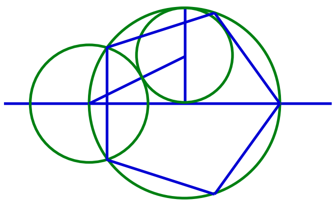
Our first idea was to place them regularly on the sides of a pentagone. It wasn't the best disposition, but it was really interesting seeing what we obtained : one equation, one curve, … What was really surprising, was that, with an idea which seems evident and logic, we could obtain such full reasoning.

Il tema proposto consisteva a trovare il cerchio più grande possibile che possa essere coperto da altri cerchi dello stesso diametro. Si sono presentati due problemi principali : quanti cerchi utilizzare e come disporli.

La nostra prima idea è stata di disporre sei cerchi sui lati di un pentagono in modo regolare. Il nostro studio ci ha permesso di osservare che questo approccio non è il migliore possibile. Tuttavia, quest'ultimo si è rivelato molto interessante poidú ci ha permesso di ricavare un'equazione, una curva rappresentativa, una formula, ecc. Un aspetto particolarmente sorprendente del nostro lavoro è osservare come, a partire da un'idea a prima vista evidente o addirittura logica, si possa poi dedurre un ragionamento logico.

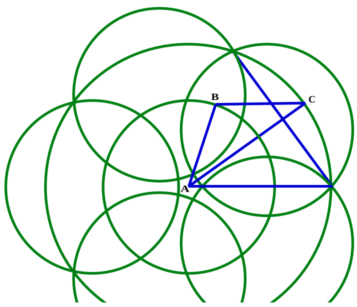
Nous avons donc décidé de placer ces disques de façon régulière autour d'un pentagone [régulier]. Après différentes manipulations, la disposition la plus simple qui nous apparut fut de se servir des côtés de ce pentagone comme base pour tracer les six cercles.

On utilise l'un des six disques, comme disque de base, et on y trace un pentagone.



A partir de chacun des côtés de ce pentagone, on place les cinq disques restant de façon régulière. Ces cinq cercles sont sécants deux à deux et forment cinq points équidistants du centre du disque de base. On trace alors un cercle passant par ces cinq points de centre identique au disque de base.

On obtient alors le plus grand disque pouvant être couvert par six disques identiques dans cette disposition. On cherche alors à calculer son diamètre.

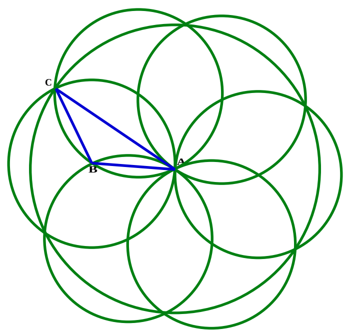


On se base sur un triangle *ABC*. x = rayon des cercles de base [= *AB*], y = rayon du cercle recouvert par les six disques [= *AC*]. Dans ce triangle, on applique le théorème d'Al Kashi [l'angle en *A* vaut 36°, moitié de l'angle de 72° sous lequel *A* voit un côté du pentagone régulier] ; on obtient alors une équation du second degré. [NDLR : voir les formules fidèlement recopiées par les parrains ; les auteurs ne donnent pas leurs calculs.]

[NDLR : les élèves dessinent une courbe muette dans un repère dont l'unité de longueur semble être 3,55 cm, et où ils mesurent (?) des coordonnées de 1,70127 et 1,3811.]

Sa courbe représentative diminue en un point précis ; on en conclut donc que le cercle recouvert par les six disques diminue après ce point. On calcule alors ce point précis à l'aide de la dérivée. [NDLR : les élèves annoncent alors $x \approx 1{,}376338192$ dont 1,3811 doit être une valeur approchée ; alors 1,701 serait une valeur approchée de y ? Mais si on veut pouvoir comparer les différentes méthodes, par exemple avec les six disques qui arrivent ci-après, c'est le rapport y/x qu'il faudrait évaluer et comparer, puisque x est variable …]

Notre étude s'est ensuite dirigée vers une disposition différente. Nous disposons six disques de façon régulière sur les côtés d'un hexagone — construit à partir d'un cercle de base fictif — afin qu'ils convergent en un



point. Les disques sont alors sécants deux à deux et forment six points équidistants de leur point de convergence. Nous obtenons, en reliant ces points, un cercle, celui-ci ayant un rayon égal à 1,732 cm, supérieur à celui obtenu à partir du pentagone, qui est de 1,701 cm. [NDLR : certes, mais quel est donc le rayon de ces six disques ? est-ce toujours la valeur précédente $x \approx 1{,}376338192 \approx 1{,}3811$?]

Nous en avons conclu que cette disposition était meilleure que la précédente, et qu'il devait certainement en exister des meilleures que nous n'avons pas eu le temps d'exploiter. [lire les deux articles suivants]