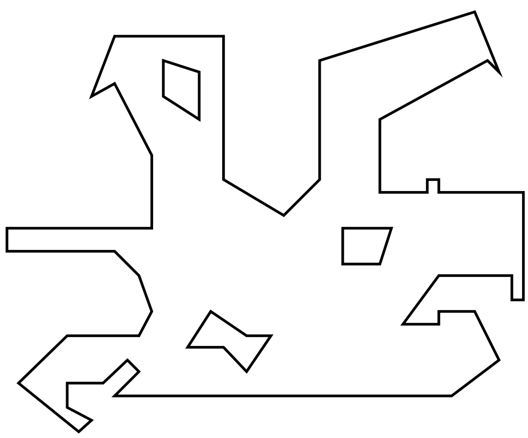
musées à surveiller

par Pierre Duchet et Charles Payan

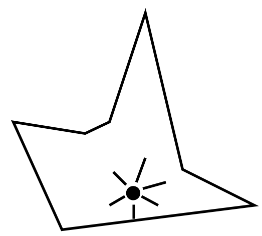
[NDLR : à l'occasion de stages de formation pour enseignants (MAFPEN 94-95, Journées Nationales de l'APMEP, Université d'Eté 95) ou lors d'actions spécifiques (à Air France pour la *Science en fête 95*), un sujet de recherche peut mener sa vie propre, avant, pendant ou après avoir été proposé à des élèves ; voici quelques étapes d'une recherche encadrée auprès d'adultes par Pierre Duchet et Charles Payan.]



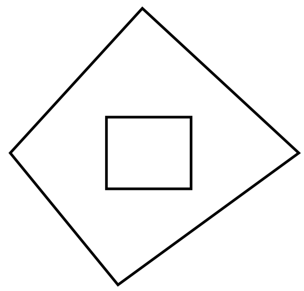
le sujet

On veut surveiller les murs d'un musée. On suppose que chaque gardien peut regarder dans toutes les directions. On désire qu'à tout instant toute partie de mur soit vue par au moins un gardien.

On se limitera, sans que ce soit une obligation, au cas où les murs du musée sont rectilignes. La surface au sol du musée peut présenter des trous. Autrement dit : sur un plan, les murs du musée sont représentés par les côtés d'un polygone et les côtés d'autres polygones placés à l'intérieur.



un gardien suffit



deux gardiens semblent nécessaires

Il n'est pas interdit d'envisager d'autres configurations.

Le but de cette recherche est de « dire des choses » sur le nombre de gardiens nécessaires à la surveillance.

Ce problème est actuellement ouvert. On ne connaît des choses significatives que dans le cas de musées sans “trous”.

Ces questions font partie d'un domaine vivant des mathématiques, la Géométrie discrète. Application à des problèmes de visibilité, éclairement. Utilisation en Robotique, Imagerie, Vision …

Quelques exemples de pistes ou d'approfondissements possibles sur le problème des gardiens de musées

Le problème initial peut donner lieu à des variantes tout aussi intéressantes. Il peut également donner lieu à des sous-problèmes, c'est-à-dire des questions dont la résolution préalable semble nécessaire.

Enfin, des cas particuliers peuvent sembler très intéressants : les résoudre peut être aussi difficile que de résoudre le problème initial, donc peut permettre la découverte de bonnes méthodes. Des variantes supplémentaires s'obtiennent en combinant les idées des variantes proposées.

• Partitionner une aire polygonale en un nombre minimum de régions convexes.

• Trouver pour une aire polygonale un recouvrement en un nombre minimum de régions, chacune pouvant être surveillée par un seul gardien.

• Etudier le cas des zones polygonales sans obstacle intérieur.

• Cas des musées à murs perpendiculaires.

• Etude en fonction du nombre de côtés.

• Un polyèdre a-t-il toujours deux sommets qui se voient mutuellement ?

• Quelles sont les performances de l'heuristique “gloutonne” : on place un gardien à l'endroit d'où l'on voit un maximum de côtés (ou de coins, ou aire maximum …), on supprime la région surveillée et on recommence sur les morceaux restants.

• Comment calculer d'aire d'une figure polygonale, le volume d'un polyèdre ?

• Quel type de preuve peut-on imaginer pour établir que k gardiens ne suffisent pas pour une forme donnée ?

• Comment résoudre une combinaison logique de plusieurs inéquations ?

• Décomposer la forme en pièces et reformuler le problème en termes de carte plane.

• Classifier les formes où k gardiens suffisent pour $k = 1, 2, \dots$

• Trouver les formes les plus “complexes” au sens où elles nécessitent un grand nombre de surveilants.

pistes suggérées au cours de la mise en recherche par les “stagiaires” eux-mêmes

• Peut-on trouver un système de valuation des points et une méthode de type variationnel pour trouver une solution ?

• Le nombre de gardiens nécessaires est inférieur ou égal à la partie entière de $n/3$ (démontré dans le cas sans trou pour $n = 5$).

• Cas quasi-convexe (un seul angle rentrant au maximum) avec un seul trou.

• “Forme” (géométries angulaires semblables) : importance des situations des coins par rapport aux droites.

• Obstacles au lieu de trous.

Conclusion ?

Ce qui suit est énoncé à propos du problème de la surveillance de **tout** le musée, mais pourrait l'être pour la surveillance des **murs.**

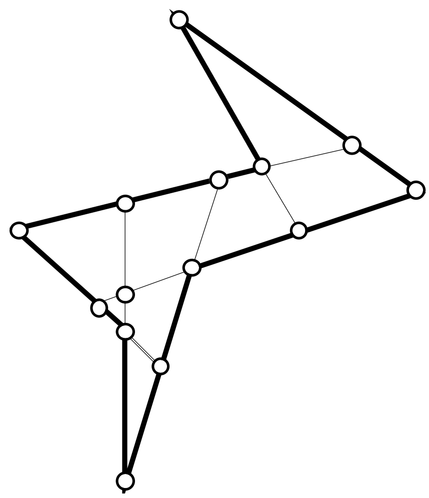
Voici un certain nombre de problèmes et conjectures dont la solution pourrait, à notre avis, être publié dans une revue scientifique.

1.— Musée avec “trous”

Conjecture : Si n est le nombre de côtés et t le nombre de trous, $[(n+t)/3]$ gardiens suffisent.

2.— Recherche pour un musée particulier donné d'une solution optimale. Algorithme et preuve (complexité / longueur). Le problème de l'existence d'algorithme et de preuve n'est pas du tout trivial.

3.— Question : Existe-t-il une solution optimale avec les gardiens placés en certains “pseudo-sommets” ?



4.— Généralisation en dimension d quelconque.

Conjecture : $[n/(d+1)]$ gardiens suffisent pour un musée sans aucune cavité ni trou (ces notions sont à définir plus précisément ; on peut retenir l'idée d'homéomorphie avec une boule).

remarque : La “tétraédrisation” (sans sommet supplémentaire), analogue tridimensionnel de la triangulation, est-elle toujours possible ?

5.— Surveillance (ou éclairage) de l'**extérieur** d'un polygone (polyèdre).

Une variante de cette question : éclairage “**pénétrant**” de l'extérieur d'un polyèdre convexe (un point est éclairé si le rayon lumineux arrivant en ce point pénètre à l'intérieur du polyèdre). On sait que, pour toute dimension, le cube est le plus “méchant”, mais on ne connaît pas le nombre minimum de lampes nécessaires. Ce célèbre problème dû à Hadwiger est ouvert depuis une quarantaine d'années.

Pierre Duchet, Charles Payan
CNRS

Références :

[1] O'Rourke, *The art gallery problem*, Addison-Wesley, 1989.

[2] Hoffman, Kaufmann, Kriegel, *The art gallery problem for polygons with holes*, Proc. foundations of Computer Science 91, 1991, 39-48.