quelques découpages

par Pierre Audin, département de mathématiques du Palais de la découverte

résumé : bavardage autour d'un bref moment du congrès où, pour la première fois dans un congrès MATh.en.JEANS, on mettait des chercheurs en recherche …

1992, Palais de la découverte : simulation de MATh.en.JEANS, en direct … des élèves cherchent, encadrés par enseignants et chercheurs ; simulation reprise à ICME 7, au Québec, en août, puis aux Journées nationales de l'APMEP à Poitiers, en octobre 1993 ;

1993, Ecole Polytechnique : des profs cherchent, encadrés par élèves et chercheurs ;

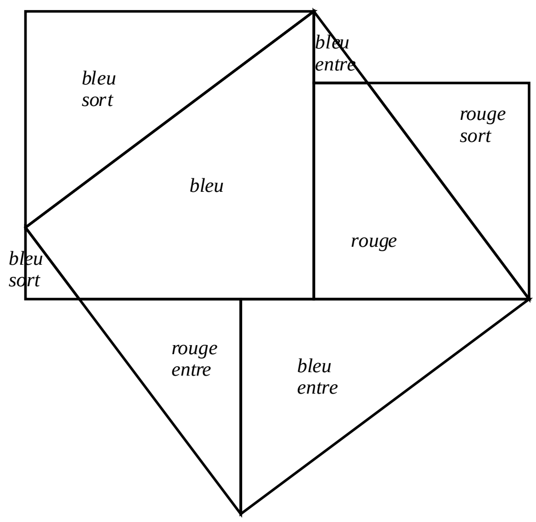
1995, Université de Villetaneuse : des chercheurs cherchent, encadrés par personne.

Colorier, découper, voilà des activités bien simples, à la portée de tous, et dès le plus jeune âge. Mais quand on quitte ce *plus jeune âge*, on maîtrise peu à peu de mieux en mieux la paire de ciseaux, si bien qu'on en vient à ne plus utiliser de ciseaux du tout, et à se contenter de dessins. Les maths ne sont alors plus loin … Commençons par, sans doute, le plus célèbre des découpages mathématiques :

le théorème de Pythagore

Il porte certainement mal son nom, puisque les Chinois nous ont laissé moult découpages à titre de démonstration. Ils donnaient peu d'indications en dehors de la figure elle-même : c'était au lecteur d'imaginer la découpe d'après les indications portées sur la figure, et *surtout* de comprendre quelle est la démonstration suggérée par la figure, ou de se montrer capable de la refaire. (Stade embryonnaire de la démonstration qui peut faire penser à certains articles d'élèves …)

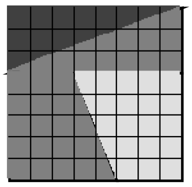
Exemple.

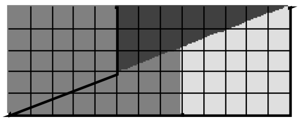


Pour aider le lecteur à lire cette “démonstration” — ou à la (re)faire — disons qu'il est utile, et même franchement nécessaire, d'utiliser l'*axiome des parallèles* (dans le plan, par un point situé hors d'une droite il passe une seule autre droite qui ne la rencontre pas), par exemple sous la forme connue : *la somme des angles d'un triangle est 180°.*

Plus étrange est le découpage suivant, d'après lequel on transforme un carré de 64 cases en un rectangle de 65 cases ; il y a donc une supercherie que je vous invite à découvrir par vous-même.

[Il y a une supercherie sinon, il n'y aurait nul besoin d'alchimie pour transformer 1 kg d'or en 1,015625 kg d'or, et, en répétant l'opération autant que nécessaire, pour devenir rapidement très riche, ce que les mathématiciens ne sont pas, ou … *ça se saurait.*]

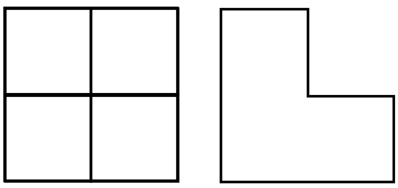




Si vous ne trouvez pas ... vous pouvez consulter dans le n° 17 de *Tangente* l'article qu'un groupe MATh.en.JEANS y publia.

D'autres découpages donnent lieu à des questions assez classiques :

• on peut découper un carré en quatre carrés plus petits, mais pouvez-vous découper un « L » en quatre parties de même forme et de même taille ? [voir dessins ci dessous]



[réponse en fin d'article ; réfléchir d'abord …]

• pouvez-vous découper un carré en cinq parties de même forme et de même taille ?
[réponse en fin d'article ; avec la même procédure …]

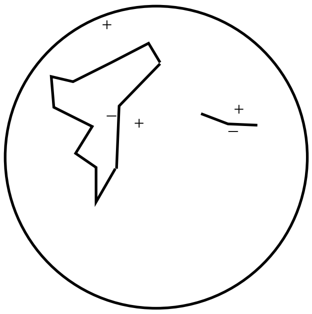
la cerise sur le gâteau

En même temps que le congrès se déroulait un stage (MAFPEN) de formation d'enseignants visant à leur apprendre à encadrer des activités de recherche pour leurs élèves. A la demande de ces enseignants, on a proposé à deux chercheurs (Pierre Duchet et Charles Payan, du CNRS, Grenoble) de se mettre à chercher une question nouvelle pour eux, en direct et devant un amphi. Ce qu'ils ont fait sur un texte proposé par François Parreau, de l'Université de Villetaneuse : il s'agissait de découper un cercle (un disque) en plusieurs pièces, de même forme et de même taille (c'est-à-dire : des pièces *isométriques*), de sorte qu'une seule des pièces contienne le centre du cercle.

En quelque sorte, il s'agit de découper un gâteau en parts égales, en faisant en sorte que la cerise centrale reste entière. On autorise les pièces à être en plusieurs morceaux, mais il faut un nombre fini de morceaux, et que globalement chaque pièce soit isométrique à chacune des autres.

La mise en recherche des deux chercheurs, bien que courte (à peine 45 minutes), fut instructive : l'un des deux se trouva déstabilisé pendant un temps, jusqu'à ce qu'il se fasse une opinion sur la réponse qu'il souhaitait donner (*ce n'est pas possible*) et sur les techniques qu'il pourrait mettre en œuvre pour donner cette réponse. L'autre cherchait et trouvait assez rapidement un *invariant* de chaque découpage potentiel :

si, en suivant le bord des pièces, on ne s'intéresse qu'aux parties faites d'arcs de cercle de même rayon que le cercle à découper, la somme des longueurs de toutes ces parties (comptées positivement ou négativement suivant l'orientation de l'arc de cercle par rapport à la pièce) est exactement le périmètre du cercle à découper ; chaque pièce contient, de ce point de vue, la même fraction de ce périmètre. On a le droit de relire ce paragraphe plusieurs fois, et d'y revenir plus tard si nécessaire après s'être aidé du dessin suivant :

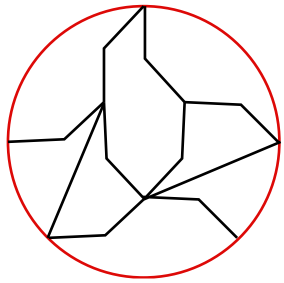


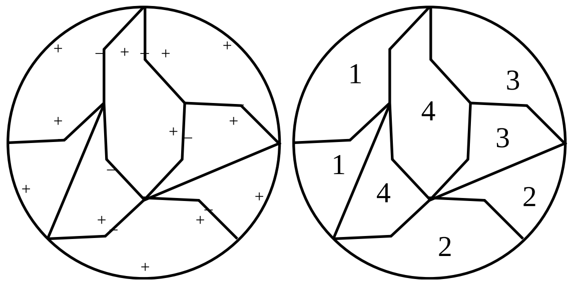
Et clairement, l'un nous faisait part en direct de ses réflexions, utilisant le tableau comme brouillon, tandis que l'autre s'enfermait dans une feuille de papier, ne nous faisant part de ses idées, et n'acceptant de discuter avec l'autre qu'au bout d'un temps : deux chercheurs, deux mises en recherche très différentes.

Bien sûr, en si peu de temps, ils avaient peu de chances d'aboutir — et ils n'ont pas abouti. Beaucoup d'enseignants — stagiaires MAFPEN et participants au congrès — se prenaient aussi au jeu et n'aboutissaient pas mieux.

Pourtant, des lycéens hongrois à qui on avait posé le même problème, auraient trouvé une infinité de solutions … En fait le problème a (au moins) une variante : on affaiblit la condition sur le centre, en demandant que les pièces (toujours isométriques) ne contiennent pas toutes le centre (qu'il y en ait au moins une qui ne passe pas par le centre). Ce serait pour cette formulation un peu différente que les lycéens hongrois auraient trouvé leurs solutions.

Quant à moi, j'ai poursuivi sur l'énoncé de départ et l'idée d'invariant, et … je n'ai pas trouvé. J'ai quand même réussi un découpage en quatre pièces, chacune composée de deux morceaux, chacun des deux morceaux étant isométrique à l'un des deux morceaux des autres pièces. Mais les pièces ne sont pas globalement isométriques les unes aux autres (les deux morceaux ne sont pas disposés de la même façon pour chacune). [C'est donc encore une variante du problème de départ.]
Voici ma proposition de découpage :





Chaque pièce est en 2 morceaux (8 morceaux groupés deux à deux pour former 4 pièces). Chaque morceau compte soit un segment de droite, soit un quart du cercle d'origine, et deux arcs de cercles dont les longueurs sont comptées l'une positivement, l'autre négativement.

Chaque morceau est isométrique à un morceau de chaque pièce ; un seul morceau contient le centre.

Mais je ne peux pas grouper les morceaux en quatre pièces toutes quatre *globalement* isométriques les unes aux autres.

Questions :

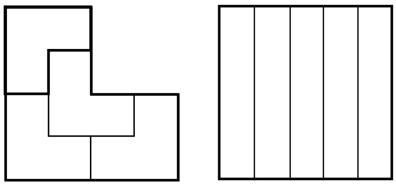
• saurez-vous trouver une ou plusieurs autres réponses de ce type ? [les pièces ne sont pas globalement isométriques les unes aux autres, mais elles le sont morceau par morceau : moi, j'en ai trouvé d'autres depuis]

• saurez-vous trouver une ou plusieurs réponses à la variante hongroise ? [les pièces sont globalement isométriques, l'une d'elles au moins ne passant pas par le centre]

• saurez-vous donner une réponse au problème posé ? [je ne sais pas, mais je ne suis pas sûr que ça ne soit pas possible]

Voici les solutions promises :

pour le « L »   et pour le carré



---

références :

• Olivier Bonnet, Philippe Chas, Razidine Fazal, Aurore Jeanne, Carlos Do Couto, Raymond Rivière (MATh.en.JEANS), *Panique au pays des merveilles*, Tangente n° 17, septembre-octobre 1990, pp. 8-10.

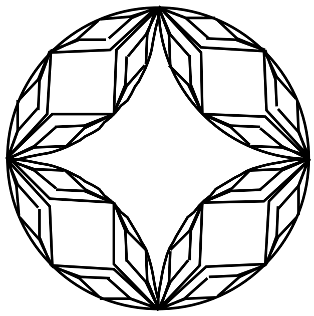
• commission inter-IREM « Histoire et épistémologie des mathématiques », *La démonstration mathématique dans l'histoire,* mai 1990, pour l'article de Jean-Claude Martzloff, *Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises*, pp. 131-153.

• M.F. Coste-Roy, P. Knerr, J.C. Martzloff, R. Tran-Dang, *Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le théorème de Pythagore sans jamais oser le demander*, brochure IREM Paris-Nord, 1980, tirée à 200 exemplaires.

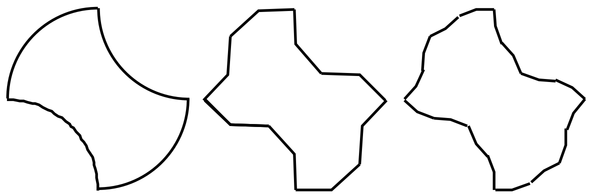
• Pieter van Delft et Jack Botermans, *1000 casse-tête du monde entier*, éditions du Chêne, 1977.

• PS : ma proposition de découpage a très certainement été inspirée d'un dessin que je connaissais depuis assez longtemps, dessin de N. Lygerōs, qui faisait la couverture du n° 1, vol. 2, janvier 1991/2461 de *Singularité* (par abonnements : Singularité, 141 avenue de Saxe, 69003 Lyon, 100 F en 1991), ce que je n'ai réalisé que longtemps après.

Voici à quoi ressemblait le dessin de N. Lygerōs, à partir duquel il n'est pas difficile de reconstituer les pièces que j'ai utilisées pour mon découpage de la page précédente :



[Ce dessin lui servait à construire une courbe



étape 1   *étape 2*   *étape 3*

continue, de longueur finie, ayant une infinité (dense) de points où elle n'est pas dérivable, mais c'est une autre question que celle du gâteau et de sa cerise …]