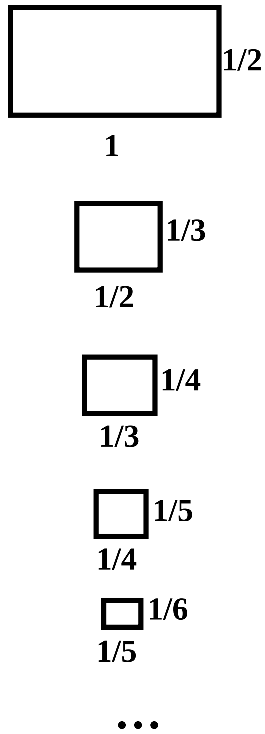
un carré pour des rectangles

par Pierre Duchet

(sur le Problème 1 du concours Kangourou en Jeans 1995 - Lycées)

le problème



La somme des aires de tous ces rectangles est précisément égale à 1 (nous vérifions cette propriété plus loin). Serait-il possible de les placer tous, sans chevauchement, dans un carré de côté 1 ? Il est remarquable que des mathématiciens aussi reconnus que D. Knuth et R. Graham aient des opinions divergentes sur cette question.

Posée par Leo Moser, célèbre collectionneur de problèmes géométriques, cette question est ouverte depuis 30 ans. Meir et Moser [2] ont montré en 1968 qu'un carré de côté (1+1/31) pouvait les contenir tous.

Des questions géométriques aussi “élémentaires” et qui sont actuellement sans réponse se trouvent dans [1].

Les réponses au concours

Le nombre demandé au concours était le côté du plus petit carré possible contenant les 1994 premiers rectangles.

La somme des aires des 1994 premiers rectangles est précisément (1-1/1995).

En effet, on peut écrire l'aire du $p^{\text{ème}}$ rectangle R_p sous la forme

$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

(Oui oui, ces deux nombres sont bien égaux :

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

etc …)

On voit ainsi facilement (en ajoutant les expressions ci-dessus) que la somme des aires des n premiers rectangles $R_1, R_2, \dots, R_n$ est

$$1 - \frac{1}{n+1}.$$

L'aire est donc toujours inférieure à 1 (et s'en rapproche de plus en plus si n augmente). On peut donc espérer placer tous les rectangles dans un carré de côté 1.

Seules 3 réponses nous sont parvenues. Deux affirmaient, sans aucun argument, que l'on pouvait tout placer dans un carré de côté 1 (l'une des réponses était un dessin obtenu par ordinateur, dessin qui s'est avéré imparfait). La troisième réponse, dûe à Benoist Busson, ingénieur hydraulicien de l'INPG (Grenoble), proposait un carré de côté

$$\mathbf{c_{min}} = 1{,}083$$

valeur supérieure à celle de Leo Moser.

En fait un examen attentif des arrangements proposés a conduit Charles Payan et moi-même à une preuve qu'un carré de côté

$$\mathbf{c_{min}} = 1+1/62$$

suffit à placer non seulement les 1994 premiers rectangles mais tous ! Nous sommes convaincus que nous pouvons aller jusqu'à 1+1/350, avec un peu de patience.

A toi, lecteur de relever le défi …

Références

[1] H. T. Croft, K. J. Falconner, R. K. Guy, *Unsolved problems in Geometry*, Springer Verlag (New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona) 1991, 200 pp.

[2] A. Meir, L. Moser, *On packing of squares and cubes*, J. of Combinatorial Theory **5**, 1968, 126-134. MR **37** #4716.

[3] C. Payan, P. Duchet, *Un peu mieux sur le tassement des rectangles harmoniques*, rapport interne, laboratoire Leibniz-CNRS, (BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9).