

Kangourou en Jeans

1995 - Collèges

par Pierre Duchet

Voici comment était présenté aux collégiens le Kangourou en Jeans. (Texte de André Deledicq et Pierre Duchet.)

Le Kangourou des mathématiques, celui qui se joue au printemps, est un QCM en temps limité, individuel, où les prix gagnés sont importants, et muni d'une énorme et coûteuse structure d'organisation, qui ne pourrait pas exister sans la participation massive de centaines de milliers d'élèves ...

Alors nous avons pensé à un Kangourou qui se jouerait en automne et qui poserait des questions ouvertes, que chacun pourrait chercher pendant plusieurs semaines s'il le voulait, éventuellement avec d'autres camarades et toute la documentation du monde ; l'organisation en serait légère et les prix symboliques ...

Cet autre Kangourou des collèves, nous avons décidé de vous le proposer en étroite liaison avec l'association MATH.en.JEANS : c'est le Kangourou en Jeans !

En bref, pour les jeunes collégiens : avec Kangourou en Jeans, faites, vous aussi, de la recherche et découvrez les mystères des objets qui font réfléchir les mathématiciens actuels. Vos idées enrichiront peut-être leur travail. Gagnez ainsi une participation à un de leur congrès et la publication de votre travail.

Fiche problème 1 : Les lignes magiques

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & + & - & + & - & + & + & \\
 & + & - & - & - & - & + & \\
 & & - & + & + & + & - & \\
 & & & - & + & + & - & \\
 & & & & - & + & - & \\
 & & & & & - & - & \\
 & & & & & & + &
 \end{array}$$

A partir d'une certaine ligne de "+" et de "-", on passe d'une ligne à la suivante par la "règle des signes" : deux signes égaux (+ + ou - -) donnent naissance à un + ; deux signes différents (+ - ou - +) donnent naissance à un -.

Le nombre de signes diminue ainsi de 1 à chaque nouvelle ligne. A la fin, on obtient un triangle de signes, pointe en bas. Certaines lignes sont dites "magiques" : elles donnent naissance à autant de signes + que de signes -. Ainsi la ligne - - - est-elle magique : on obtient en effet un triangle ayant 3 signes +, ce qui équilibre les 3 signes - du départ :

$$\begin{array}{ccc}
 - & - & - \\
 & + & + \\
 & & +
 \end{array}$$

La ligne + + - + - + + (première figure) est également magique.

Pourriez-vous trouver de longues lignes magiques ?

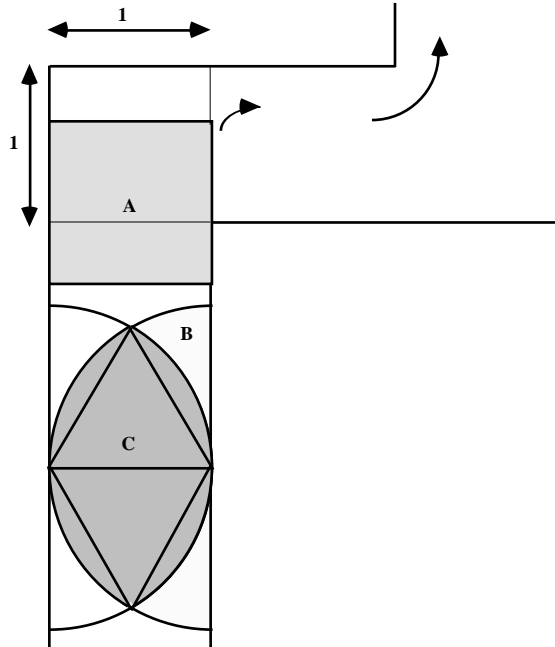
Sauriez-vous caractériser les lignes magiques ?

Forme de réponse— *Indiquez la longueur de la plus longue ligne magique que vous avez obtenue (en nombre de signes) :*

Indiquez-nous la ligne magique correspondante, et expliquez-nous comment vous l'avez obtenue.

Fiche problème 2 : Le déménagement

Des objets de formes diverses peuvent passer les coudes d'un couloir.



Le carré **A**, de côté 1, passe “sans difficulté”.
 Le demi-disque **B**, de rayon 1, passe le premier coude mais pas le second. La forme **C**, en amande, passe les deux coudes. Son aire n'est pas très longue à calculer si l'on observe que les angles des triangles dessinés font 60° , soit $1/6$ de tour complet. On trouve :

$$\text{aire C} \approx 1,23\dots$$

La forme **C** est donc plus grande (en surface) que **A**.

Pourriez-vous trouver encore mieux ?

Forme de la réponse : Indiquez l'aire du plus grand objet (c'est-à-dire ayant la plus grande surface mesurée horizontalement) que vous savez pouvoir déménager.

Vous donnerez toutes les explications nécessaires pour que nous puissions vérifier que votre solution est acceptable.

la règle des signes

par Pierre Duchet

(sur le Problème 1 du concours Kangourou en Jeans 1995 - Collèges)

(cf. "Les lignes magiques" page 137)

le problème

```

+ + - + - + +
+ - - - - +
- + + + -
- + + -
- + -
- -
+

```

A partir d'une certaine ligne de "+" et de "-", on passe d'une ligne à la suivante par la "règle des signes" : deux signes égaux (+ + ou - -) donnent naissance à un + ; deux signes différents (+ - ou - +) donnent naissance à un -.

Le nombre de signes diminue ainsi de 1 à chaque nouvelle ligne. A la fin, on obtient un triangle de signes, pointe en bas.

Certaines lignes donnent naissance à autant de signes + que de signes -. Elles sont dites "magiques".

Existe-t-il des lignes magiques arbitrairement grandes ? Cette question apparemment facile est, à ma connaissance non résolue. Elle est due à Hugo Steinhaus [1] et a près de 40 ans !

Les résultats du concours

Le nombre demandé était la longueur de la plus grande ligne magique trouvée.

13 réponses nous sont parvenues, dont une d'un professeur avec l'aide d'un programme Pascal. Certaines recherches ont été facilitées par l'usage d'un tableur (en remplaçant les + et - par +1 et -1 et en effectuant le calcul de la ligne suivante par multiplication).

Une d'elles proposait tout simplement une réponse infinie ; bien qu'il soit clair que $\infty = \infty$, le jury n'a pas retenu cette réponse car nulle part n'était construite une infinité de signes qui donnera naissance à une double infinité de signes + et -. [NDLC : mauvais joueurs ! un seul signe - parmi une infinité de signes + ... mais je ne l'ai pas construite ...]

Le record établi à ce jour est de $\mathbf{long_{max} = 240}$. Il a été établi par tâtonnements avec l'aide du tableur Microsoft™Excel, par Nicolas François de Paris. Hélas sa réponse nous est parvenue hors délai ; sa précédente réponse, reçue à temps ne proposait que 52 et a été battue par un groupe de 4 élèves du Collège Victor Hugo de Noisy-le-Grand (93). Avec une ligne magique de 123 signes, ils gagnent le concours.

Palmarès (par longueurs)

- **240**
Nicolas François (Paris) *hors concours*
- **123**
Malynary Taing, Monirath Ngor, Héléne Ly & Nita Neou (93 Noisy-le-Grand)
- **52**
Nicolas François (Paris)
- **32**
Paul Lieles (30 Les Tavernes) *hors-concours (professeur)*
- **31**
Caroline Pesce (5^{ème}, 57 Metz)
- **23**
Ghislain Fourny (42 St Galmien)
- **23**
Kadène N'gor, Imad Mechri, Antonio Arguelles & Aziz Belbouab (93 Noisy-le-Grand)
- **19**
Anna Tiev & Celine Kouoi (93 Noisy-le-Grand)
- **16**
Jean-Baptiste Lagaert (6^{ème}, 93 Noisy-le-Grand)
- **14**
Frida Manai & Masophy Taing (4^{ème} F, 93 Noisy-le-Grand)
- **12**
Ahmed Guechache, Benoît Leclerc & Cyril Imbert (5^{ème}, 94 Arcueil)
- **8**
Stéphanie Boure, Cindy Guérin & Sabrina Guérin (3^{ème}, 08 Machault)
- **7**
Linda Lakhal (93 Noisy-le-Grand)
- **infini**
Aude Reder (93 Noisy-le-Grand)

Pour vous entraîner voici quelques lignes magiques :

- 12 - + + - - + - - + + + -
- ou - - - + + + - + - + - +
- 15 - + + + + - - - - + - + - + -
- 20 + + + + - - + - - - + + + + - - - - - +
- 123 - + + + + + + + + - + - - - + - + - - -
- + + - + + - - + + - - + - - + + - - + -
- + + - + - + + - + - - + + + + + - - - -
- + + - + - + + - - - - - - - - + - + - -
- + - - + + - + + + - - + + + - - + + + -
- + + + - - + - - - + + - + + + + - + -
- + + +

... et le record avec 240 signes :

- - + + - + - + - - + - + - - + - + - +
- + - + + + - - + - - + - + - - + - + + -
- + - + + - + - - - - - - + - - + - + - -
- - - - + - - - - - - - - - + + + + - +
- + + - - + - + - - - + + - + + - + + - +
- + - + + - + - + - + - + + + + - + - - -
- + - + - + + - - - - + - - - - + - + + -
- + + - + - + - + - + - + - + + - + + - +
- + - - + - + + - - - + + - + + - + + +
- + - + + + + - + + + + - + - - + - - - -
- - - - + + - - - + - - - - - - + - - -
- + - - + - - - - + - - - + + + - + - - -

Références

[1] H. Steinhaus, *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*, Pergamon, Oxford, 1964, 98 pp.

[NDLC : il existe aussi des ouvrages en langue française ...
H. Steinhaus, *Cent problèmes élémentaires de mathématiques résolus suivis de douze autres laissés sans solution*, Gauthier-Villars, Paris, 1965, 186 pp. ; le problème évoqué ici y est bien l'un des *douze autres laissés sans solution.*]