les partitions d'entiers

par Nadia Belkessam, Dora Bokwala, Karima Boukaïba, Véronique Gounot, Ebtissam Hazgui, Cathy Kith Beugre, 1° S1 (modules) lycée Louise Michel (Bobigny, 93)

enseignant : M. François Gaudel

chercheur : M. Daniel Barsky

Partitions d'entiers
Ces jeunes filles de Bobigny ont travaillé sur les partitions d'entiers, c'est-à-dire les manières de décomposer un entier positif en somme d'entiers positifs. Elles ont calculé le nombre de permutations, d'abord à la main, puis à l'aide d'une belle relation de récurrence sur les nombres de partitions d'un nombre avec un nombre donné de nombres (sic). L'exposé a apparemment été suffisamment clair et complet pour ne susciter aucune question.

Yann Ollivier, Terminale au lycée d'Enghien

Le sujet de notre travail de recherche porte sur les partitions d'entiers. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce thème et d'ailleurs certains d'entre eux ont publiés des ouvrages concernant ce sujet comme par exemple Leonhard Euler (1707-1783) qui a écrit un ouvrage en 1748.

définitions

On appelle partition d'un entier n tout ensemble de nombres entiers compris entre 1 et n et dont la somme est n.

Exemple : soit $n = 7$ alors $\{1 ; 2 ; 4\}$ est une partition de 7 car $1 + 2 + 4 = 7$

On peut représenter une partition de différentes façons :

• en rangeant les nombres par ordre croissant : 1, 2, 4
• ou par ordre décroissant : 4, 2, 1

On peut ainsi reconnaître au premier coup d'œil deux partitions identiques.

Sur notre exemple $\{1 ; 2 ; 4\}$ 1 2 4 sont des parts ; *le nombre de parts est ici égal à 3*.

Un même nombre a en général plusieurs partitions. Exemple, $n = 3$:

$\{1 ; 1 ; 1\}$
$\{2 ; 1\}$
$\{3\}$

On dit que le nombre de partitions de 3 est 3.

Le nombre de partitions de n se note $P(n)$.

résultats

Nous avons cherché les partitions d'entiers de $n = 1$ à $n = 10$. Nous avons calculé leurs nombres et avons obtenu les résultats suivants avec $P(n)$ le nombre de partitions de l'entier n :

$P(1) = 1$ $P(2) = 2$ $P(3) = 3$
$P(4) = 5$ $P(5) = 7$ $P(6) = 11$
$P(7) = 15$ $P(8) = 22$ $P(9) = 30$
$P(10) = 42$

Ces résultats ont été obtenus en procédant méthodiquement. Exemple, $n = 5$:

$$
\begin{gathered}
1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 + 2 \\
1 + 2 + 2 \\
1 + 1 + 3 \\
2 + 3 \\
4 + 1 \\
5
\end{gathered}
$$

Donc $P(5) = 7$

Méthode :
On commence avec la partition dont toutes les parts sont égales à 1, puis on remplace progressivement les couples de 1 par des 2 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus continuer. Puis on passe aux partitions contenant un 3. Pour la partie restante, on applique la méthode précédente …

Ensuite on passe aux partitions contenant un 4 et pour la partie restante on applique la méthode précédente …

Ensuite on passe aux partitions contenant k et pour la partie restante on applique la méthode précédente, jusqu'à ce que $k = n$.

partitions remarquables

On peut imposer des conditions supplémentaires aux partitions. On peut faire en sorte que les parts m_i d' une partition soient :

• distinctes 2 à 2 :
on notera leur nombre $P(\mathrm{D}\,;n)$. Les résultats obtenus sont :

$P(\mathrm{D}\,;1) = 1$ $P(\mathrm{D}\,;2) = 1$ $P(\mathrm{D}\,;3) = 2$
$P(\mathrm{D}\,;4) = 2$ $P(\mathrm{D}\,;5) = 3$ $P(\mathrm{D}\,;6) = 4$
$P(\mathrm{D}\,;7) = 5$ $P(\mathrm{D}\,;8) = 6$ $P(\mathrm{D}\,;9) = 8$
$P(\mathrm{D}\,;10) = 9$

• ou impaires : on notera leur nombre $P(\mathrm{I}\,;n)$

$P(\mathrm{I}\,;1) = 1$ $P(\mathrm{I}\,;2) = 1$ $P(\mathrm{I}\,;3) = 2$
$P(\mathrm{I}\,;4) = 2$ $P(\mathrm{I}\,;5) = 3$ $P(\mathrm{I}\,;6) = 4$
$P(\mathrm{I}\,;7) = 5$ $P(\mathrm{I}\,;8) = 6$ $P(\mathrm{I}\,;9) = 8$
$P(\mathrm{I}\,;10) = 9$

Nous remarquons que pour $n \leq 10$, $P(\mathrm{D}\,;n) = P(\mathrm{I}\,;n)$ mais nous ne l'avons pas démontré.

représentation graphique

Les différentes partitions de n peuvent être représentées selon un diagramme appelé **diagramme de Ferrars**. Dans ce diagramme, on représente les nombres par des rangées de points.

Par exemple $n = 9$. La partition 5 + 2 + 1 + 1 a pour représentation graphique :

• • • • •
• •
•
•

Ce diagramme peut être lu verticalement et on observe la partition 4 + 2 + 1 + 1 + 1, ou encore dans le sens horizontal et on obtient la partition suivante 5 + 2 + 1 + 1. On dit que ces partitions sont *conjuguées* l'une par rapport à l'autre car elles sont obtenues à partir d'un même diagramme.

Cette représentation graphique peut être utilisée afin de calculer le nombre total de partitions de n en utilisant le double sens de la lecture (vertical et horizontal). Cependant, cette méthode fait apparaître de nombreux doubles qu'il faut éliminer au fur et à mesure sous peine d'être dépassé. De plus, elle n'est pas très pratique lorsque n devient très grand.

En lisant le diagramme horizontalement et verticalement, nous avons remarqué que **le nombre de partitions de *n* dont le nombre de part est *p*, est égal au nombre de partitions de *n* dont le nombre le plus grand est *p***. Nous allons donc vous le démontrer à l'aide du diagramme : prenons tout d'abord par exemple $n = 7$ et établissons le diagramme suivant :

• • •	*Le plus grand élément est 3
• •	*Le nombre de parts est 3.
•	

Les partitions avec 3 comme étant le plus grand élément sont :

• • •	• • •	• • •	• • •
•	• •	• •	• • •
•	•	• •	•
•	•		
•			

Les partitions avec 3 parts sont :

• • • • •   • • • •   • • •   • • •
•   • •   • • •   • •
•   •   •   • •

On constate que le nombre de ces partitions est égal. Cela s'explique par le fait qu'à chaque partition de 7 dont le plus grand élément est 3, correspond de façon bijective une partition de 7 dont le nombre de parts est 3.

Par exemple :

• • • • •   • • •
•   •
• ↔ •
•
•

En fait, on ne fait que mettre les points horizontaux à la place des points verticaux et rapidement, grâce à une symétrie par rapport à la diagonale.

Cette transformation géométrique est valable pour tout n (nombre dont on cherche les partitions) et p (le plus grand élément). On peut donc dire que quel que soit p et n, le nombre de partitions de n dont le plus grand élément est p est égal au nombre de partitions de n dont le nombre de parts est p.

recherche d'une méthode pour dénombrer facilement les partitions

Nous avons trouvé une méthode permettant de dénombrer facilement le nombre de partitions d'un entier n ; cette méthode fait intervenir les partitions de n avec au plus m parts. Elle permet de construire, ligne par ligne, le tableau suivant. [ci-contre]

explication du tableau

Le nombre de partitions d'un entier naturel n ayant m parts est égal au nombre de partitions d'un nombre $n - m$ avec au plus m parts. Deux cas sont possibles :

Si $n - m \leq m$, alors le nombre de partitions de n est égal au nombre de partitions de $n - m$. Exemple : $p(6, 4) = P(2) = 2$.

Si $n - m \geq m$, alors il faut faire la somme des nombres de partitions de $n - m$ de 0 à m. $p(n, m) = p(n - m, 1) + p(n - m, 2) + \ldots + p(n - m, m)$. Exemple :

$$p(9, 3) = \sum [p(6, m \leq 3)]$$
$$p(9, 3) = p(6, 1) + p(6, 2) + p(6, 3)$$
$$p(9, 3) = 1 + 3 + 3 = 7$$

Nous avons regroupé nos résultats dans un tableau. Pour connaître le nombre de partitions total de n, il suffit d'additionner tous les nombres de partitions qui composent $P(n)$.

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	18	19	20	P(n)
1	1																				1
2	1	1																			2
3	1	1	1																		3
4	1	2	1	1																	5
5	1	2	2	1	1																7
6	1	3	3	2	1	1															11
7	1	3	4	3	2	1	1														15
8	1	4	5	5	3	2	1	1													22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1												30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1											42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1										56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1									77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1								101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1							135
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1	1						176
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	1					231
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	3	2	1	1				297
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1			385
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1		490
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	627

$n\backslash m$: n est un entier strictement positif
m est le nombre de parts
$P(n)$: nombre total de partitions

Limites du tableau : il permet de dénombrer les classements mais pas de savoir de quels nombres se composent ces classements.

Pour mieux comprendre, utilisons les diagrammes de Ferrars et un exemple.

Prenons les partitions de 9 avec 3 parts.

En retirant un point à chaque ligne, c'est-à-dire à chaque part, nous retirons trois points en tout, et obtenons donc des partitions de 6, qui bien sûr ne peuvent avoir plus de trois parts, mais peuvent en avoir une, deux ou trois :

Dans le cas ci-dessous, on obtient une partition de 6 avec 3 parts : (. points retirés)

• • • .	$m_1 = 4$		• • •	$m_1 = 3$
• • .	$m_2 = 3$	$\rightarrow$	• •	$m_2 = 2$
• .	$m_3 = 2$		•	$m_3 = 1$

Ordonnons nos points différement pour obtenir une autre partition de 9 avec 3 parts : en effectuant le même retrait, nous obtenons une partition de 6 avec 2 parts.

• • • .	$m_1 = 4$		• • •	$m_1 =3$
• • • .	$m_2 = 4$	$\rightarrow$	• • •	$m_2 =3$
.	$m_3 = 1$			

Ou encore :

• • • • • • .	$m_1 = 7$		• • • • • •	$m_1 = 6$
.	$m_2 = 1$	$\rightarrow$		
.	$m_3 = 1$			

Nous obtenons cette fois une partition de 6 avec 1 part.

Réciproquement, si nous prenons une partition quelconque de 6 comportant moins de trois parts, nous pouvons toujours rajouter trois points (y compris dans une ligne vide), de façon à obtenir une partition de 9 (puisqu'on rajoute trois points), avec 3 parts (inverser le sens des flèches dans les exemples ci-dessus). Il y a donc autant de partitions de 9 avec trois parts que de partitions de 6 avec au plus trois parts (1, 2, ou 3).

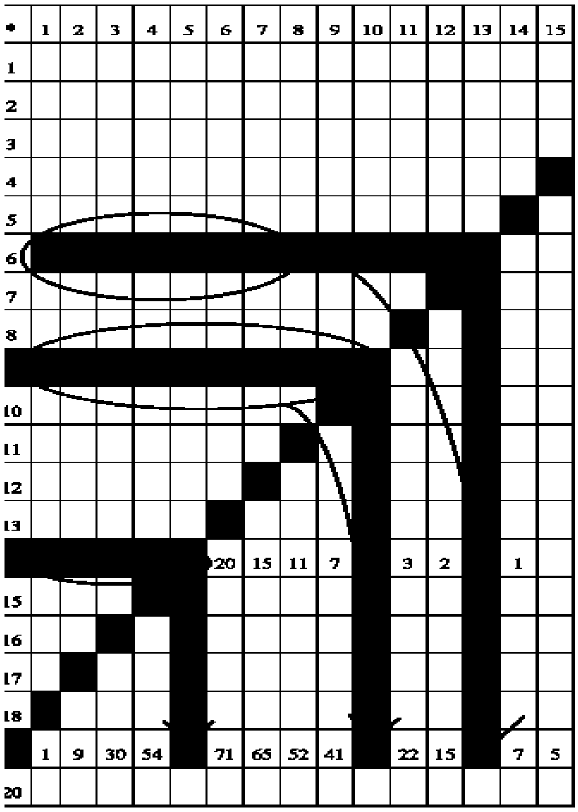
Le raisonnement précédent est bien sûr valable pour des partitions de n'importe quel nombre strictement positif n, avec m parts ($0 < m \leq n$) : en retirant un point à chacune des m parts, on obtient exactement les partitions de $n - m$ composées d'au plus m parts.

Si au lieu de prendre des partitions de 9 avec 3 parts, nous avions étudié les partitions de 9 avec 5 parts, nous aurions, en retirant un point à chaque part, obtenu des partitions du nombre 4. Or ces dernières ont toujours moins de 5 parts ; on les aurait donc toutes obtenues, et ainsi, on a : $p(9, 5) = P(4)$.

Utilisation de notre méthode :

On remplit successivement les lignes du tableau.

Supposons qu'on veuille calculer $p(19, 10)$: on est donc sensé avoir rempli toutes les lignes jusqu'à la dix-huitième. On part de la case de $p(19, 10)$, et on remonte verticalement jusqu'à ce qu'on rencontre la diagonale grisée du tableau, et on fait la somme des nombres situés à gauche sur la ligne horizontale.



$$p(19, 10) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 4 + 1 = 30$$