fractions continues

par Antoine Grégoire, Vincent Lusset, Jean-Yves Moyen, Jean-François Pariaud, Mathieu Perrus du lycée Saint-Exupéry de Lyon (69), Sophie Kergomard et ses amies du lycée Jean Moulin de Lyon (69)

enseignants : M. Serge Betton et Mme Marie-Claude Pontille

chercheur : M. G. Chevalier

Compte-rendu de l'exposé 21 par le groupe 34
Sujet : Fractions continues.
Il s'agit d'étudier les différentes façons d'approcher un nombre (tel que $\sqrt{x}$, e, π …) grâce à des fractions dites continues et aussi de rechercher les propriétés de ces fractions (périodicité, …).

Commentaires : c'est un sujet très intéressant. Les conférenciers ont été clairs, leurs recherches étaient assez complètes. Dommage toutefois qu'il manquait quelques démonstrations.

Présentation du sujet

Le sujet concerne l'approximation des réels par des rationnels en utilisant les fractions continues, c'est-à-dire des fractions de la forme :

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

On note $F = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. (Remarque : La suite des a_i peut être finie ou infinie.)

Deux problèmes complémentaires se posent :

1) Etant donné un réel $\neq 0$, quel est son développement en fraction continue ?

2) Une fraction continue représente-t-elle toujours un réel ? Lequel ?

Développement en fractions continues de certains réels

A la base, il y a eu le calcul à la calculatrice, selon l' algorithme de formation, des fractions continues correspondant aux racines carrées des 100 premiers entiers naturels. Des périodicités ont été observées.

fractions continues périodiques

On appelle ainsi toute fraction continue dont la suite des coefficients se répète à l'infini à partir d'un certain rang. On note :

$$F = [a_0, a_1, a_2, \dots , a_j, \boldsymbol{a_{j+1}, \dots , a_k}].$$

$a_{j+1}, \dots , a_k$ est la période de F.

Remarque : on appelle fraction continue périodique pure une fraction continue qui est périodique dès le premier coefficient. On la note $F = [\boldsymbol{a_0, a_1, \dots , a_k}]$.

On observe alors des similitudes entre certains développements périodiques des dites racines carrées. Par exemple, on a :

$\sqrt{3} = [1, \mathbf{1, 2}]$, $\sqrt{6} = [2, \mathbf{2, 4}]$, $\sqrt{11} = [3, \mathbf{3, 6}]$.

On trouve ainsi une famille d'entiers dont la racine carrée a pour développement périodique [a, $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$], mais pour définir entièrement cette famille (ainsi que les suivantes), il faut trouver le lien qui relie les différents entiers entre eux et avec les développements de leurs racines carrées.

Pour cela, on utilise une méthode graphique: on porte en ordonnées les réels considérés et en abscisses leurs rangs dans la famille. Il semble que les points soient situés sur une parabole d'équation $y = x^2+2$ (trouvée à la calculatrice). On a ainsi défini une famille : celle des nombres de la forme $\sqrt{a^2+2}$, dont nous allons montrer en deux étapes qu'ils ont un développement fractionnaire périodique de la forme [a, $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$].

• Développement de $\sqrt{a^2+2}$

La partie entière de $\sqrt{a^2+2}$ est a ($a \neq 0$). Soit b sa partie décimale.

$$b = \sqrt{a^2+2} - a = \frac{2}{\sqrt{a^2+2}+a} = \frac{1}{\frac{2a+b}{2}} \quad ;$$

on en tire à la fois

$$b = \frac{1}{a+\frac{b}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{2} = \frac{1}{2a+b},$$

$$\text{d'où : } b = \frac{1}{a+\frac{1}{2a+b}}.$$

On voit qu'on aura alors les coefficients a et $2a$ se répétant à l'infini.

• De quel nombre [a, $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$] est-il le développement ? (On suppose, ce qui sera démontré plus tard, que F est un réel et que [a, $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$] tend vers un réel.)

$$F = a + \frac{1}{a+\frac{1}{2a+F-a}} \Leftrightarrow F = a + \frac{F+a}{aF+a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow aF^2 + a^2F + F = a^2F + a^3 + a + F + a$$

$$aF^2 = a^3 + 2a \Leftrightarrow F^2 = a^2 + 2 \ (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow F = \sqrt{a^2+2} \quad (F > 0)$$

On a donc bien :

$$\sqrt{a^2+2} = [a, \boldsymbol{a}, \mathbf{2}\boldsymbol{a}].$$

On peut ainsi trouver de nombreuses familles :

Tous les nombres de la forme …	… ont un développement périodique tel que …
$\sqrt{a^2+1}$	[a, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$]
$\sqrt{a^2+2}$	[a, $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$]
$\sqrt{a^2-1}$	[a-1, **1**, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$**-2**]
$\sqrt{a^2-a}$	[a-1, **2**, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$**-2**]
$\sqrt{9a^2+3}$	[3a, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$, $\mathbf{6}\boldsymbol{a}$]
$\sqrt{a^2-2}$	[a-1, **1**, $\boldsymbol{a}$**-2**, **1**, $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$**-2**]
$\sqrt{4a^2-a}$	[2a-1, **1**, **2**, **1**, $\mathbf{4}\boldsymbol{a}$**-2**]
$\sqrt{9a^2+8a+2}$	[3a+1, **2**, **1**, $\mathbf{3}\boldsymbol{a}$, **1**, **2**, $\mathbf{6}\boldsymbol{a}$**+2**]
$\sqrt{4a^2+a}$	[2a, **4**, $\mathbf{4}\boldsymbol{a}$]
$\sqrt{9a^2-2a}$	[3a-1, **1**, **1**, **1**, $\mathbf{6}\boldsymbol{a}$**-2**]

L'étape suivante a consisté à généraliser : quels sont les nombres qui ont des développements périodiques de longueur 2 ? La méthode de recherche est basée sur de longs tâtonnements et des fausses pistes, mais en fin de compte, avec une démonstration en deux étapes analogue à la précédente, on a montré que :

Tout réel $\sqrt{n^2+\frac{2n}{x}}$, avec n et x entiers naturels non nuls, a pour développement [n, $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$]. Inversement, toute fraction continue [n, $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$] avec n et x entiers naturels non nuls est le développement du réel $\sqrt{n^2+\frac{2n}{x}}$.

Une fraction continue représente-t-elle toujours un réel ?

Considérons deux cas.

premier cas : la suite des a_i est finie.

On peut alors toujours écrire la fraction continue sous la forme p/q, où p et q sont deux entiers naturels non-nuls. Elle est donc rationnelle.

Inversement, si F est rationnel, il a un développement en fraction continue qui est fini. [NDLR : une preuve pourrait reposer sur les propriétés (A), (B), (C), (D) énumérées ci-contre.]

Ainsi F a un développement fini si et seulement si F est rationnel.

deuxième cas : la suite des a_i est infinie.

D'après le premier cas, si F existe, il est irrationnel ; et il est la limite de la suite des ***réduites***, c'est-à-dire les réductions à une forme p_n/q_n des fractions continues correspondant aux n premiers termes du développement $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Par exemple, si $F = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}$, les trois premières réduites seront :

$$F_0 = 3,\ F_1 = 3 + \frac{1}{7},\ F_2 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}.$$

[NDLR : le lecteur aura peut-être reconnu qui se cache derrière F …]

La $n^{\text{ème}}$ réduite se note donc $F_n = \dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \ldots a_n]$, avec $\dfrac{p_n}{q_n}$ irréductible.

En étudiant la suite des réduites, on observe les propriétés suivantes :

(A) : pour tout $k \geq 2$, $\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$

(B) : pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \dfrac{p_k}{q_k} = \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$.

(C) : pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \dfrac{p_k}{q_k} = \dfrac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}$.

(D) : pour tout $k \geq 2$, $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$

[NDLR : les élèves utilisent maintenant un théorème sur les suites “adjacentes” qui permet de démontrer, sous certaines hypothèses, que deux suites ont une limite commune, sans avoir à calculer explicitement cette limite.]

En utilisant (C), on peut montrer que la suite (Si) des réduites d'indice impair décroît et que la suite (Sp) des réduites d'indice pair croît.

Ces deux monotonies et (B) permettent de montrer que (Si) est majorée et que (Sp) est minorée, d'où l'on tire que les deux suites convergent.

Enfin le premier membre de (B) tend vers la différence de leurs limites en même temps que, grâce à (D), vers 0. Ainsi la limite est commune …

la suite des réduites converge.

Maintenant que l'on sait que les fractions continues convergent vers des réels, il s'agit de déterminer vers quel type de réels.

Nous avons étudié trois cas de fractions continues périodiques.

1) Fractions du type $F = [\boldsymbol{a}]$.
2) Fractions du type $F = [\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots \boldsymbol{a_n}]$
3) Fractions continues périodiques quelconques.

1) Fractions du type $F = [\boldsymbol{a}]$.

On peut écrire :

$F = [a, \boldsymbol{a}]$ ou encore $F = [a, F] = a + 1/F$.

F étant non-nul, il suffit de résoudre l'équation équivalente : $F^2 - aF - 1 = 0$, dont on ne retient que la solution positive :

$$F = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

2) Fractions du type $F = [\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots \boldsymbol{a_n}]$ (Fractions périodiques pures).

3) Fractions continues périodiques quelconques.

Nous avons montré, au prix de calculs plus longs, que dans tous ces cas, le résultat est de la forme :

$$F = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$$