marche aléatoire

par Jim Perrichon, Flavien Perrichon, Franck Laurès, Fabien Sato, Bruno Cape de Baillon, Flavio Ardizzone, Stéphanie Chantre, Guillaume Antoine, élèves de secondes et premières des lycées La Fontaine et Buffon de Paris.

enseignants : Mmes et MM. Biscarat, Gaudemet, Lattuati et Moscovici.

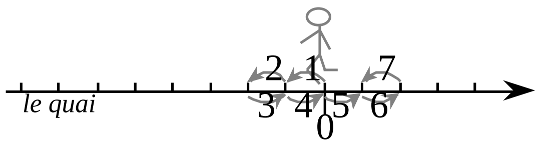
chercheur : M. Gilles Godefroy

sujet :

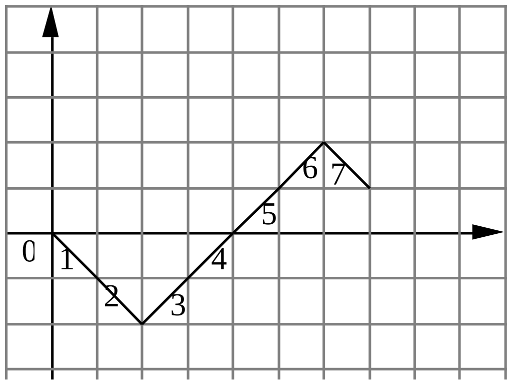
Balade aléatoire. Partant d'un point A, quelle est la chance de revenir au point de départ sachant que le déplacement est aléatoire ? En dimension 2 (4 directions possibles) et en dimension 3 (6 directions possibles).

Si on marche sur un quai de long en large, par pas de 1, avec une probabilité de 0,5 à chaque pas, quelle est la probabilité de se retrouver au point de départ au bout de *n* pas ?

convention de représentation d'une marche



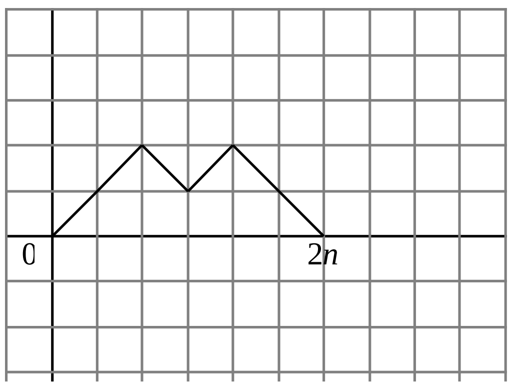
Cette marche “aléatoire” est représentée par le schéma suivant:



Un “pas” vers la droite est représenté par une “montée” et un “pas” vers la gauche est représenté par une “descente”.

problème

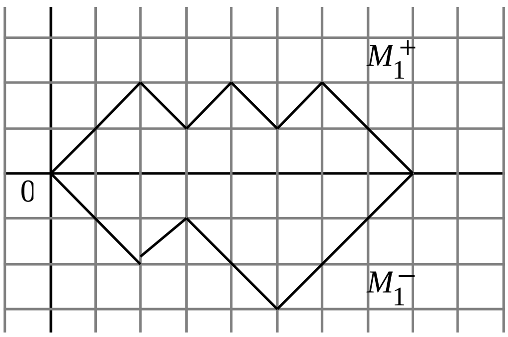
On cherche la probabilité p pour qu'un chemin de longueur $2n$, partant de l'origine, coupe pour la première fois l'axe (xx') au point de coordonnées ($2n$, 0).



résolution du problème

La longueur du chemin (qui est $2n$) est égale au nombre de “pas” effectués par le mobile. On choisit de prendre un chemin de longueur $2n$ (et non n) car le mobile ne peut recouper l'axe (xx') qu'après un nombre pair de mouvements.

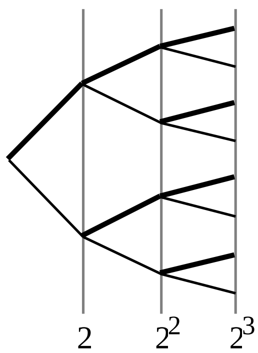
notations :
M_1 : Ensemble des chemins de longueur $2n$ partant de l'origine et touchant (xx') pour la première fois au point ($2n$, 0)
M_1^+ : Ensemble des chemins de M_1 situés “au dessus” de (xx')
M_1^- : Ensemble des chemins de M_1 situés “au dessous” de (xx')



La probabilité cherchée est :

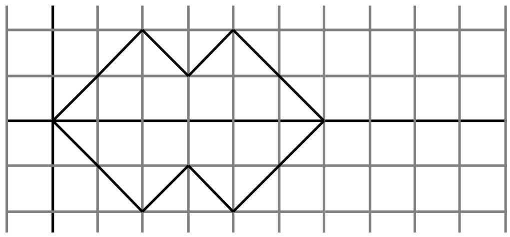
$$p = \frac{\text{Card}(M_1)}{\text{nombre de chemins de longueur } 2n \text{ issus de } (0,\ 0)}$$

Or, le dénominateur est égal à 2^{2n} puisqu'après chaque mouvement le mobile a, à nouveau, le choix entre deux mouvements différents. On peut expliciter ceci en adoptant une représentation sous forme “d'arbre” :



calcul de Card(M_1)

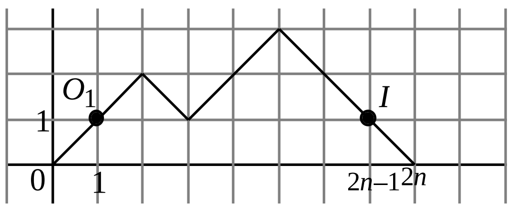
En fonction des notations adoptées, on peut écrire : Card(M_1) = Card(M_1^+) + Card(M_1^-). Or, à chaque chemin appartenant à M_1^+, on peut associer un chemin appartenant à M_1^-.



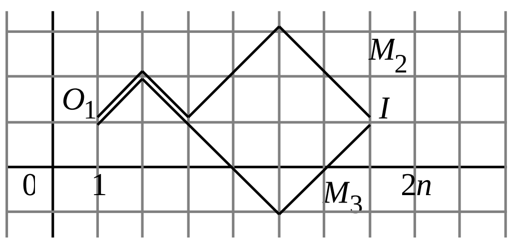
Par conséquent, d'après ce principe de symétrie, Card(M_1^+) = Card(M_1^-), donc

$$\text{Card}(M_1) = 2\text{Card}(M_1^+).$$

Or tout chemin appartenant à M_1^+ commence par un mouvement ascendant (dès lors que le premier mouvement est descendant, le chemin appartient à M_1^-). De même, le dernier mouvement d'un chemin appartenant à M_1^+ est, obligatoirement descendant. Par conséquent, Card (M_1^+) est égal aussi au nombre de chemins de longueur $2n - 2$ partant de O_1(1, 1) et arrivant en I ($2n - 1$, 1).



notations
M_2 : chemins de longueur $2n - 2$ allant de O_1(1, 1) à I ($2n - 1$, 1)
M_3 : chemins de longueur $2n - 2$ allant de O_1 à I et coupant (xx').



On a donc :

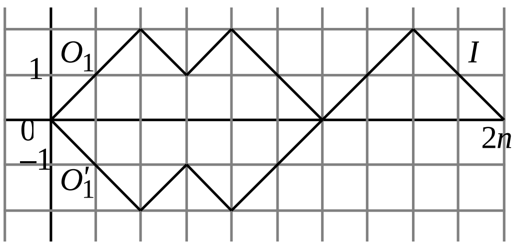
$$\mathrm{Card}(M_1) = \mathrm{Card}(M_2) - \mathrm{Card}(M_3).$$

calcul de Card(M_2)

Un chemin de longueur $2n - 2$ allant de O_1 à I comporte $n - 1$ “montées” et $n - 1$ “descentes” ; ces chemins sont donc au nombre de C_{2n-2}^{n-1} donc $\mathrm{Card}(M_2) = C_{2n-2}^{n-1}$ (*)

calcul de Card(M_3)

Principe de réflexion :
A tout chemin partant de O_1 et arrivant en I en coupant l'axe (xx'), on peut en associer un qui part du symétrique de O_1 par rapport à l'axe (xx') (i.e le point O_1') et qui arrive aussi en I (ces chemins coupent obligatoirement l'axe (xx') puisque les points O_1' et I se situent de part et d'autre de l'axe).



D'après ce principe, Card(M_3) est égal au nombre de chemins de longueur $2n - 2$ allant de O_1' (1, -1) à I ($2n - 1$, 1). Or, un chemin de longueur $2n - 2$ allant de O_1' à I comporte n “montées” et $n - 2$ “descentes”; ces chemins sont donc au nombre de C_{2n-2}^{n} i.e :

$$\mathrm{Card}(M_3) = C_{2n-2}^{n}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{Card}(M_1^+) = C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n}$$
$$= \frac{(2n - 2)!}{(n - 1)!\,(n - 1)!} - \frac{(2n - 2)!}{n\,!\,(n - 2)!}$$

et, après calculs :

$$\mathrm{Card}(M_1^+) = C_{2n-2}^{n-1}\ /n$$

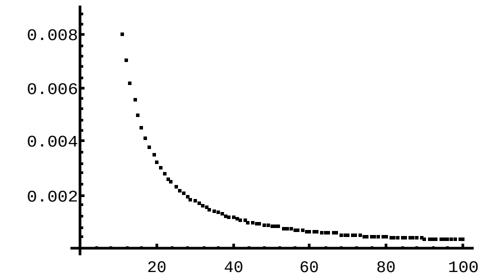
Or $\mathrm{Card}(M_1) = 2\mathrm{Card}(M_1^+)$

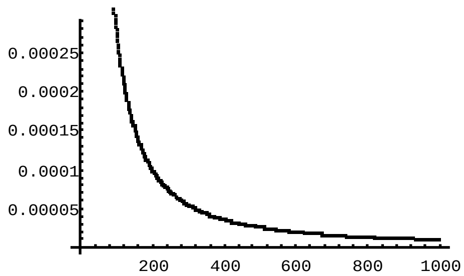
La probabilité p pour qu'un chemin de longueur $2n$ partant de l'origine coupe pour la première fois l'axe (xx') au point ($2n$, 0) est donc égale à :

$$\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n \times 2^{2n-1}}$$

Par exemple, si la marche est de longueur 10, on trouve une probabilité d'environ 0,027 ou 2,7 % et si la marche est de longueur 20, la probabilité est d'environ 0,092 ou 0,9 %.

(Les élèves du lycée La Fontaine ont construit la courbe donnant la probabilité en fonction de la valeur de $2n$.)





(*) C_4^2 est le nombre de façons de choisir 2 objets parmi 4 objets :*A B C D*. On peut choisir *A B* ou *A C* ou *A D* ou *B C* ou *B D* ou *C D*. Il y a six façons de choisir 2 objets parmi 4. On écrit : $C_4^2 = 6$. Il existe une formule générale qui évite de faire la liste des choix possibles !