

# Probabilités : quelle actualité pour la recherche et l'enseignement ?

par **Jean-Pierre Kahane**,  
membre correspondant de l'Académie des Sciences, section mathématiques.

Cette conférence a été donnée le 13 novembre 1995, lors de la première journée du stage organisé en 1995-96 par l'Association MATH.en.JEANS, pour la MAFPEN de Créteil, à l'Académie des Sciences en collaboration avec la cellule de communication pédagogique et culturelle d'icelle.

Avertissement au lecteur : ce texte est mis au point avec la collaboration de M. Jean-Pierre Kahane, et le support de notes et d'enregistrements (audio) ; le début de la conférence n'avait pu être enregistré pour des raisons techniques, de même qu'avant elle, la conférence de M. Paul Germain, Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences.



[Merci à l'Académie des Sciences qui a accueilli cette journée de stage ; nos remerciements vont plus particulièrement à Paul Germain, *Académicien, Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences*, ainsi qu'à Jean-Pierre Kahane, *membre correspondant de l'Académie des Sciences*, à Eric Brian, *Centre Alexandre Koyré (EHESS - MHNH - CNRS, UMR 48)*, qui ont accepté avec enthousiasme de participer à cette journée axée sur les probabilités et les statistiques, et à Béatrice Ajchenbaum-Boffety, *Chargée de la communication pédagogique et culturelle de l'Académie des Sciences*, qui a participé à la mise au point de cette journée et a su faire en sorte que la journée se déroule bien, de façon très concrète.]

Cette causerie devrait répondre à deux exigences : vous révéler quelque chose d'actuel et d'intéressant dans un domaine des probabilités, et faire écho (je ne dis pas : répondre) aux préoccupations que vous avez actuellement pour enseigner probabilités et statistique. Je m'étais d'abord préparé à vous parler d'un sujet dont l'histoire est très instructive et le développement tentaculaire : le mouvement brownien. Cela répondait bien à la première exigence, mais pas du tout à la seconde. Je me suis maintenant décidé à vous donner mon point de vue sur les difficultés et l'importance de l'enseignement des probabilités. Du coup, vous serez à même d'apprécier les difficultés quand j'en viendrai, dans un exposé que je ramasserai comme je pourrai, à la matière proprement mathématique et au mouvement brownien.

Faut-il enseigner d'abord les probabilités, comme théorie mathématique, ou d'abord la statistique, comme pratique multiforme ? Ça dépend. Au niveau du DEUG B, il y a quelques années, il y avait autant de partisans de chaque méthode. A un niveau donné, faut-il enseigner d'abord ceci, ou d'abord cela ? J'examinerai la question en tournant autour du pot.

Effectivement, il arrive qu'en enseignant d'une certaine façon, on crée des blocages pour les enseignements ultérieurs. C'est vrai en géométrie, c'est vrai en probabilités, mais c'est vrai dans toutes les mathématiques, donc il ne faut pas s'en affoler.

Dans les deux cas, géométrie et probabilités, il y a une grande portée pratique et des approches différentes à différents niveaux.

## *Leur portée.*

Pour la géométrie, elle est en prise sur la mécanique, sur l'ensemble de la physique. Je me souviens d'une enquête, menée à l'Académie, par Choquet, il y a quelques années — à la demande de la Commission internationale de l'enseignement mathématique — sur la manière dont les spécialistes

des différentes disciplines envisageaient les mathématiques comme discipline de service. Il y avait eu une réponse assez massive et très représentative de physiciens. Et tous les physiciens étaient d'accord : il faut revenir et insister sur l'enseignement de la géométrie. La géométrie est consubstantielle à la physique du point de vue des physiciens.

Mais les probabilités ont un champ d'applications et de contacts avec la réalité qui est peut-être encore plus vaste : c'est *l'estimation des risques, c'est les assurances*. Maintenant les probabilités interviennent aussi bien pour la modélisation des centrales nucléaires que pour la modélisation des stratégies bancaires, donc dans l'art de l'ingénieur, dans les mathématiques financières, à beaucoup d'endroits : une *immense portée pratique*. Il y a besoin de beaucoup de mathématiciens dans les domaines d'application des probabilités — c'est l'une des raisons pour lesquelles il y a peu de mathématiciens au chômage, il ne faut pas se dissimuler la chose.

*Immense portée culturelle*. Paul Germain y a insisté. Mais les notions de *risque* sont fort mal perçues par l'ensemble des hommes. La réflexion sur le *hasard* en est restée pour beaucoup à un stade *préaristotélicien*. Les écrits d'Aristote sur *hasard* et *fortune* mériteraient d'être médités par pas mal de gens.

Les notions d'indépendance aussi sont mal comprises. Vous n'avez qu'à penser aux gens qui, parce qu'un billet gagnant a été vendu dans un kiosque, se précipitent sur le même kiosque parce qu'ils pensent qu'il y a peut-être une chance d'obtenir là un billet gagnant. Et pensez à cette remarque que j'ai entendue il y a trente ans dans une conférence de l'Union Rationaliste à Montpellier, de la part d'un professeur d'histoire qui dénonçait cette attitude irrationnelle, en expliquant que les malheureux, ils ne s'aperçoivent pas que justement parce que le kiosque a vendu ce billet gagnant il a moins de chance de vendre les billets gagnants les années suivantes. [rires] Donc : portée culturelle très très considérable des probabilités.

L'importance des probabilités dans la vie courante est considérable et un peu mystérieuse ; qu'on songe aux sondages ... dans quelle mesure est-ce qu'ils sont fiables, pas fiables ? C'est un domaine de liens entre probabilités et statistiques qui est absolument fascinant.

Dans les deux cas, géométrie et probabilités, vous avez des approches formalisées, et des approches formalisées de différents niveaux.

### *Les approches ...*

#### *... en géométrie*

La première formalisation c'est Euclide.

La deuxième formalisation c'est Hilbert, l'axiomatique de la géométrie.

La troisième formalisation, c'est celle que vous avez connue — plus comme élèves que comme professeurs d'après votre âge. C'est la formalisation qu'on enseignait il y a quelques années au niveau même des lycées : c'est la réduction à l'algèbre.

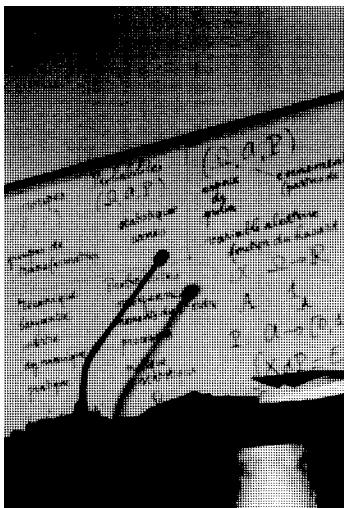
Enseigner l'algèbre— qui, effectivement depuis Descartes, peut être considérée comme un fondement de la géométrie — avant la géométrie, en tirer la géométrie, d'un point de vue logique ce n'est pas mal. Ça fait reposer la non-contradiction de la géométrie sur la non-contradiction de l'arithmétique. Logiquement c'est bon ; pédagogiquement vous savez ce que ça a donné. Donc la simplicité maximum d'un exposé n'est pas un garant de l'acquisition optimum par les élèves.

Vous avez donc au moins ces trois niveaux de formalisation, mais vous avez également le niveau de l'apprentissage élémentaire et quotidien. On commence à faire de la géométrie, et même de la géométrie dans l'espace, en classe de sixième. A l'âge d'un an, on commence à jouer avec des cubes et avec des emboîtements de cylindres.



Les emboîtements de cylindres, c'est très intéressant à observer — naturellement, vous vous doutez que mes derniers petits-enfants ont cet âge — mais les jeux avec les cubes, ça c'est miraculeux : la richesse des symétries du cube, on la voit *en action* dans les jeux des enfants d'un an. Naturellement, ils n'en ont pas conscience, mais ils prennent un contact avec la réalité, avec les gestes de la réalité. De la même façon que, quand ils tournent et qu'ils font une ronde, il se dégage pour eux *une notion de cercle*, de la même façon, quand ils jouent avec les cubes, il se dégage pour eux *une notion de groupe de symétrie*. Cela dit ce n'est pas pour dire que la notion de groupe de symétrie doit être introduite à l'âge de un an, ni à l'âge de six, ni à l'âge de dix — vous voyez ce que je veux dire.

Donc vous avez le niveau des axiomatiques de la géométrie, vous avez le niveau de l'apprentissage élémentaire et ludique de la géométrie, et vous avez exactement la même chose en probabilités.



### ... en probabilités.

Vous avez les différentes approches et axiomatiques de la probabilité.

L'aspect ludique — il n'y a peut-être pas besoin d'y insister — c'est les premiers jeux auxquels sont confrontés les enfants : ce sont les jeux de dés, les jeux de cartes, c'est les jeux de hasard. Donc, vraiment, on peut avoir vis-à-vis des deux disciplines certaines problématiques en commun.

Je veux être un peu plus spécifique. En géométrie, j'ai dit Euclide. En probabilités, qu'est-ce que je dirais ? Le modèle Euclide, c'est un modèle réduit de la géométrie, c'est la géométrie euclidienne plane, avec des axiomes spécifiques, avec une étude très fine. Que va être le modèle — réduit mais le bon modèle pour *travailler avec* — en probabilités ? A mon sens, c'est le modèle de Laplace, dans *l'Introduction philosophique à la théorie des probabilités* : le modèle qu'il prend, c'est les urnes. Et, dans le seul cours de probabilités que j'ai jamais suivi, qui était celui de Darmois à la Sorbonne — en 1947 si je ne me trompe — on parlait des urnes.

Il y a pas mal de choses à faire à partir des urnes, y compris expliciter les difficultés qui peuvent se présenter au point de vue de l'indépendance. C'est parce que les gens ont à l'esprit un faux modèle d'urne, qu'ils vont faire des erreurs en ce qui concerne l'indépendance.

### Euclide, les urnes. Hilbert ?

Hilbert, c'est une axiomatique de la géométrie euclidienne, qui n'est pas constructive. Vous avez les éléments de la géométrie euclidienne, comme chacun sait — selon Queneau — ça s'appelle les *mots*, les *phrases* et les *paragraphes* : par deux mots passe une seule phrase, et caetera. Et la géométrie de Hilbert est une géométrie parfaitement axiomatisée, mais dont, par exemple, la contradiction n'est pas prouvée puisqu'il n'y a pas de modèle.

Ce qui est le plus voisin de Hilbert, c'est  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , modèle axiomatique plus simple que celui de la géométrie de Hilbert, et fondé sur une explicitation de ce que sont l'espace de probabilités, les évènements, la probabilité.

Vous avez la réduction à l'algèbre. La réduction à l'algèbre, à mon sens, c'est une approche des probabilités qui a été en faveur, et peut très bien le redevenir, dans les années 1930, sous l'influence de Steinhaus : c'était la réduction de tout espace de probabilités à l'intervalle  $[0, 1]$  de la droite réelle. On prend l'intervalle  $[0, 1]$  de la droite réelle comme espace de probabilités, et comme probabilité, on prend la mesure, la mesure linéaire ; et on réduit toute l'étude des probabilités à l'étude des fonctions définies sur un intervalle réel. Pas plus mauvais qu'autre chose.

A tant faire que de continuer le petit jeu des parallèles et des analogies, je pensais à une analogie dans la simplicité apparente du concept et la difficulté de l'assimiler, en parlant tout à l'heure des groupes.

Vous savez que ce qui séduisait Piaget autant que Bourbaki, c'était la simplicité de l'axiomatique de groupe : c'est si simple, c'est si puissant, si général, il faut mettre ça à la disposition de l'enfant le plus rapidement possible ; et en fait la définition d'un groupe est si simple que vous pouvez la passer à l'ordinateur et dérouler le début de la théorie des groupes, mécaniquement.

Oui, un ordinateur comprend, mais un enfant ne comprend pas. Parce que, pour comprendre, nous autres, nous avons besoin de donner du *sens*. Et tant que c'est une axiomatique qui se dévide, ça n'a pas de sens.

Alors attention, parce qu'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , c'est un petit peu plus compliqué mais à peine ; c'est simple au départ, ça permet de dérouler assez bien les théories, mais *quel sens est-ce que ça a ?* Il faut aller assez loin dans la théorie pour que ça rejoigne le sens — et donc c'est une difficulté.

Et à cet égard, je ne vois pas plus condamnable de commencer par certains groupes, les groupes de transformations de la géométrie, les groupes de transformations de la géométrie euclidienne si vous voulez, que de commencer en probabilités par des applications ou par la statistique, ou bien par des modèles réduits du type urnes.

Dans tous les cas, ça consiste à faire quelque chose de plus spécial, de moins général, et qui permet d'introduire, plus tard, des concepts qui vont dépasser ces expériences.

### *L'analogie entre probabilités et mécanique.*

Autre analogie qui me paraît peut-être plus intéressante, celle de la mécanique et des probabilités. C'est sans doute très classique, mais ça va assez loin.

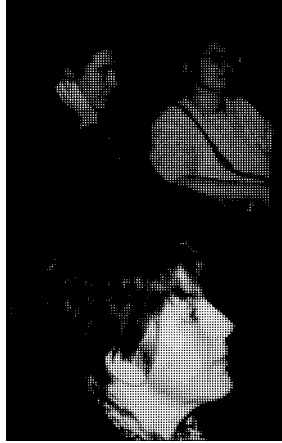
En probabilités, j'ai insisté sur la notion de moyenne. En mécanique, c'est le barycentre, le centre de gravité. Les autres notions de moyennes — valeur médiane, et caetera — correspondent à d'autres notions de centre, ou d'équilibre. En mécanique, vous avez tout ce qui concerne l'inertie. Le terme même employé en probabilités, *moment*, moment du second ordre, c'est emprunté à la mécanique, et c'est la même notion.

Vous avez la dynamique. La dynamique c'est l'intervention du temps. L'intervention du temps en probabilités, c'est : les *processus stochastiques*.

Et puis, la mécanique ce n'est pas seulement la mécanique théorique, c'est aussi la mécanique pratique. En parallèle vous avez les probabilités pratiques, qui ne se réduisent pas à la statistique mais où la statistique joue un rôle très important.

### *interruption ...*

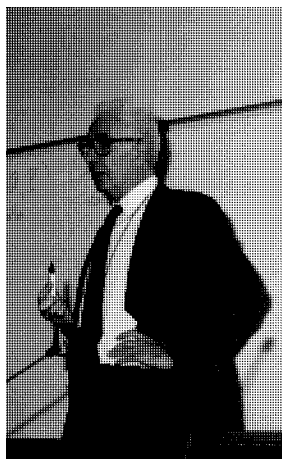
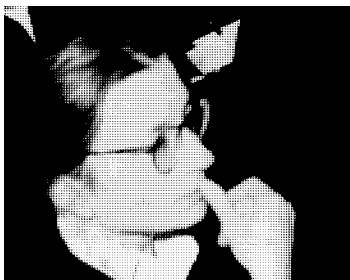
[début de la question inaudible] les degrés de liberté en mécanique, en probabilités qu'est-ce que ça donne ?



**Jean-Pierre Kahane :**

Degré de liberté ... les paramètres, les paramètres de la statistique. Je réagis sans réfléchir, peut-être est-ce que ça ne tient pas, mais vraiment, c'est ce que ça me suggère.

Ces analogies sont si fortes que, il me semble, elles ont une valeur pédagogique et il ne me paraît pas possible de parler de moyenne en statistique, en probabilités, sans avoir la moyenne en géométrie, le centre de gravité, sans avoir la moyenne en mécanique. Je ne sais pas ce que vous en pensez, mais en tout cas pour moi, *ça fait partie de la culture.*

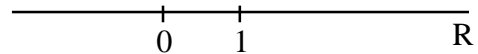


**Cours de probabilités express.**

Maintenant, je peux peut-être vous infliger un petit cours de probabilités, et puis aller à très grandes enjambées au mouvement brownien — ce qui est paradoxal parce que le mouvement brownien, c'est un mouvement très très désordonné, et tout à fait local. Je vais commencer par le cours de probabilités express, avec  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

$\Omega$ , c'est l'espace de probabilités. Pour Mme Ajchenbaum-Boffety, je voudrais dire que ... *espace de probabilités* ... vous pouvez concevoir que les points de l'espace de probabilités, vous les appelez les *hasards*. Et puis, il y a une notion de variable aléatoire. Ça s'appelle variable aléatoire à cause du rôle que ça a : concrètement, c'est variable, mais théoriquement, ce sont des fonctions du hasard. C'est-à-dire que, voilà  $X$ , c'est défini sur  $\Omega$ , et puis c'est à valeurs, disons, réelles ; ça, c'est la droite réelle.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



$\mathcal{A}$  ? C'est ce qu'on appelle les *événements*. Ce sont des parties de  $\Omega$ , ce sont des collections de hasards dont on dit souvent les uns sont favorables, et les autres sont défavorables. L'évènement favorable est constitué des hasards favorables.

Et il y a toujours une variable aléatoire qui est liée à un évènement, et c'est très intéressant : quand  $A$  est un évènement, la fonction qui vaut 1 sur  $A$  et qui vaut 0 ailleurs, c'est une variable aléatoire ; et elle joue un rôle tout à fait fondamental comme variable aléatoire. C'est en combinant des variables aléatoires comme ça, et en passant à la limite, qu'on les obtient toutes.

Et  $P$ , c'est la probabilité ... vous savez, en logique, une proposition a pour valeur *vrai* ou *faux* ... et une proposition dans l'algèbre de Boole, ça se réalise comme une partie de

l'algèbre de Boole, on peut dire *évènement*, cet évènement est vrai ou faux — évènement ou proposition, c'est à peu près la même chose. En probabilités, ce n'est pas vrai ou faux, ce n'est pas valeur 0 ou 1, c'est valeur *entre* 0 et 1.

Donc *probabilité*, c'est une application de l'ensemble des évènements à valeurs dans  $[0, 1]$ , avec certaines règles de calcul qui sont les règles de calcul ordinaires de la *mesure* : quand on a deux objets disjoints, la mesure de leur réunion, c'est la somme de leurs mesures — essentiellement, c'est la propriété fondamentale.

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

Une mesure, ça permet une intégration. Toutes les variables aléatoires ne vont pas être intégrables, mais beaucoup de variables aléatoires — dans la pratique — seront intégrables. L'intégrale des variables aléatoires, dans le langage probabiliste, ça s'appelle l'*espérance*.

Et par exemple, si vous appliquez ça à la variable aléatoire  $1_A$  — celle qui vaut 1 sur  $A$ , et 0 ailleurs — ça donne  $P(A)$ , la probabilité au sens où on l'a définie. On imagine comme ça, comment, en combinant des *fonctions indicatrices*, on peut accéder à la notion générale d'espérance.

$$E(1_A) = P(A)$$

### **Le jargon.**

Il y a une grossièreté qui est commise par les mathématiciens dans leur jargon, c'est de donner un nom à l'ensemble des fonctions intégrables : c'est  $L^1$  —  $L^1$  c'est pour Lebesgue et sa théorie de l'intégration au début du siècle ; l'intégrale de Lebesgue, c'est sans aucun doute un fondement des probabilités.

Et si on veut préciser, on dira  $L^1(\Omega)$  en sous-entendant : on a muni  $\Omega$  d'une algèbre d'évènements et d'une mesure de probabilité.

### **dans la salle**

[*intervention difficilement audible*][...] autant en géométrie un point matériel, intuitivement on peut en avoir une idée, autant en probabilité un hasard c'est très désagréable [...]

### **Jean-Pierre Kahane :**

Oui, mais ce dont on a une idée intuitive, c'est fonction du hasard. Et vous avez sans doute raison, à mon sens c'est le manque d'habitude.

Permettez une digression. *Hasard* c'est une notion qui vient de quantité de sources ; ça ne se traduit pas de la même façon dans différentes langues :

*hasard* évoque le jeu de dés pour nous, c'est le terme arabe,

*hasard* a également la connotation un peu dangereuse des hasards défavorables, *azar* en espagnol, c'est défavorable ;

*aléa* c'est le jeu de dés, mais *aléa* également a une connotation un peu défavorable ;

*randon* serait dans certains cas meilleur, vous savez que, pour les Anglais, c'est *random* — random analysis — et le *randon*, c'est simplement la randonnée, c'est la promenade au hasard. Avoir, comme notion fondamentale, la promenade au hasard — on classe les promenades au hasard et c'est ça l'espace de probabilités — ça serait pas mal ...

Maintenant, vous pouvez dire : voilà un point, un nombre réel entre 0 et 1, à partir de maintenant je l'appelle le hasard ; dans la formalisation, ça peut être comme ça.

Maintenant, le hasard, c'est un terme que j'utilise ici, il n'est généralement pas utilisé dans les cours. Je l'ai utilisé à votre intention, Madame [Ajchenbaum-Boffety], pas à l'intention des collègues, ici, dont je savais qu'ils le pointeraient.

Mais *en ce qui concerne le point matériel* permettez-moi de réagir très fort. Le point matériel, maintenant, oui, **maintenant**, oui. Parce que Newton est passé par là, et puis qu'il y a eu le rouleau compresseur des Encyclopédistes et de toute la tradition qu'on a de la mécanique newtonienne, qui est complètement absurde.

*Qu'est-ce que c'est que ces points matériels qui ont des masses et qui n'ont pas de dimensions ?*

*Qu'est-ce que c'est que ces points qui agissent à distance de manière instantanée alors que l'on sait que la lumière a une vitesse limitée ?*

Ça, ça fait partie du *non-sens* auquel nous sommes habitués.

Mais ce non-sens est tellement ancré chez nous que les notions qui font le sens, qui sont celles de la mécanique quantique, on n'arrive pas à les assimiler. Il y a *obstacle* de compréhension à cause du point matériel.

Je ne veux pas faire comme Dieudonné parce que je n'aime pas les conséquences qu'on a pu tirer d'une déclaration qui était une boutade, mais si vous m'en donniez l'occasion, je dirais presque :

« à bas le point matériel ! »

### *interruption*

[*inaudible*, à propos de la *grossièreté* de  $L^1$ ]

**Jean-Pierre Kahane :**

$L^1$  ? Oh, mais, écoutez : j'ai honte d'avoir autant de symboles et de signes en face d'une personne qui nous fait le plaisir de sa visite et qui est de formation historienne ... Si vous lisez *l'introduction philosophique aux probabilités* de Laplace, vous verrez qu'il n'y a pas une formule, qu'il n'y a même pas une lettre employée comme symbole.

Quand Laplace a besoin de la loi qu'on appelle loi de Gauss — sans doute parce que De Moivre l'a introduite et que Laplace a découvert le *théorème central limite* qui lui donne sa vraie raison d'être — Laplace a évidemment besoin de  $e$  (comment peut-on parler de  $e^{-x^2/2}$  sans parler de  $e$  ?) eh bien quand il parle de  $e$  il parle du *nombre dont le logarithme népérien est l'unité*.

C'était le langage du XVIII<sup>e</sup> siècle, et j'aimerais bien que d'une certaine façon on puisse y revenir. J'aimerais que nous parlions un langage plus fleuri, j'aimerais que nous disions *espace de Lebesgue* au lieu de dire  $L^1$ . C'est désincarné, mais enfin, on s'entend, alors allons-y. On est forcé d'employer le jargon, mais il faut savoir que ce n'est pas beau. Du reste les journalistes scientifiques se refusent au jargon, et se refusent aux formules ; pour une part, ils ont tort, mais pour une autre part, il faut se demander : qu'est-ce qu'ils ont derrière la tête ?

Alors tant pis :  $L^1(\Omega)$ . Et puis, parce que vous savez tous, ou presque, ce que cela veut dire :  $L^2(\Omega)$ .

$L^2(\Omega)$ , ça signifie l'espace des fonctions dont le carré est intégrable. C'est le domaine du second ordre, le domaine des moments du second ordre, et en même temps, c'est un domaine géométrique absolument fascinant, parce que c'est la *généralisation* de l'espace euclidien.

Dans  $L^2(\Omega)$ , vous avez non seulement la notion de centre de gravité, mais vous avez également les notions de distance euclidienne, vous avez des notions topologiques : le voisinage, etc.  $L^2(\Omega)$ , c'est une espèce de généralisation à une infinité de dimensions de l'espace euclidien usuel. D'où la faveur immense de  $L^2(\Omega)$  dans les enseignements de probabilités. Les ingénieurs vont connaître  $L^2(\Omega)$ , et souvent ne vont même pas soupçonner qu'il y a des variables aléatoires qui n'appartiennent même pas à  $L^1(\Omega)$  — parce que  $L^1(\Omega)$  contient  $L^2(\Omega)$ .

Dans le cadre de cette introduction, je rappelle très brièvement ce que veut dire *l'indépendance*.

Quand on a une fonction  $f$  et une variable aléatoire  $X$ ,  $f(X)$  c'est aussi une variable aléatoire, vous pouvez aussi essayer de définir l'espérance de  $f(X)$  : quand  $f$  est positive, ça a toujours un sens, fini ou infini — c'est assez commode. On peut se borner à  $f$  positive, mais quand  $f$  est bornée, ça a aussi toujours un sens.

$$Ef(X)$$

Ça c'est une espérance, et il y a un grand théorème : quand  $X$  est donnée, c'est linéaire en  $f$ , et ça peut s'exprimer comme une intégrale de  $f$  par rapport à quelque chose, qui est une mesure. Et cette mesure liée à  $X$ , s'appelle la *distribution* de  $X$ . La distribution, c'est sa définition la plus générale : si je prenais des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ , ou à valeurs dans n'importe quel ensemble, la définition de la distribution resterait la même.

Et l'indépendance s'exprime par ceci :  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, quand on a des fonctions  $f$  et  $g$ , et qu'on prend l'espérance du produit,  $f(X)g(Y)$ , ça donne l'espérance  $f(X)$  multipliée par l'espérance  $g(Y)$ .

$$E(f(X)g(Y)) = Ef(X)Eg(Y)$$

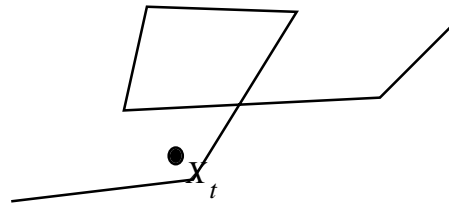
Naturellement, cette définition, qui vaut pour l'indépendance de  $X$  et de  $Y$ , se généralise immédiatement à un nombre quelconque de variables aléatoires. Et on dit que des événements sont indépendants lorsque leurs fonctions indicatrices sont indépendantes.

Il y a naturellement d'autres manières d'exprimer ça : en utilisant les distributions, et puis la notion très puissante introduite par Laplace, utilisée systématiquement par Paul Lévy, de *fonction caractéristique* : si on prend pour  $f(X)$  la fonction  $e^{iuX}$ ,  $u$  étant un nombre réel, ça donne une fonction de  $u$  qu'on appelle la fonction caractéristique.

Quelquefois on peut définir une variable aléatoire par sa fonction caractéristique, par exemple : une *variable normale*, qu'on appelle encore une variable de Gauss, normalisée, une variable normale sera définie par : l'espérance de  $e^{iuX} = e^{-u^2/2}$  — c'est ce dont je parlais il y a un instant à propos de Laplace. Il y a tout un domaine des probabilités qui est *probabilités gaussiennes*, qui travaille avec des sous-espaces de  $L^2(\Omega)$ , qui sont constitués de variables multiples de variables normales, qu'on appelle des variables gaussiennes centrées.

### *Les processus stochastiques.*

Qu'est-ce qu'un *processus stochastique* — stochastique, c'est encore un gros mot — du second ordre ? Un processus du second ordre, disons que c'est une courbe paramétrée par le temps, dans  $L^2(\Omega)$ . Vous prenez  $L^2(\Omega)$ , un gros espace qui ressemble à un espace euclidien ; vous prenez une courbe là-dedans, vous voyez vous avez  $X$  ici, et puis ... au temps  $t$  vous avez  $X_t$ ,  $X_t$  parcourt la courbe ; vous vous donnez à la fois la courbe et la loi du temps, la trajectoire. Dans  $L^2(\Omega)$ , cette courbe, décrite par  $X_t$ , c'est la version abstraite d'un processus du second ordre.



C'est un peu criminel, ce que je fais là : je vous assène une définition et pour le moment elle n'a pas de sens ... elle est simple mais elle n'a pas de sens. Et je continue, je continue avec les non-sens.

*[intervention, inaudible]*

*Jean-Pierre Kahane :*

Je vais vous demander la même chose que vous demandez aux élèves : je vais vous demander un acte de confiance ...



**nouvelle intervention, inaudible**

[sur le « bon prof » qui doit introduire la notion]

**Jean-Pierre Kahane :**

Voilà ... je suis un mauvais professeur, je ne vous donne pas la raison. Naturellement, vous la devinez parce que je vous ai dit que je vous parlerai du mouvement brownien. Oui ?

**Eric Brian** [enregistrement très difficile à décrypter, le micro n'étant pas dirigé vers Eric Brian qui se tournait vers la salle, et tournait de ce fait le dos au micro] :

Je peux vous voler trente secondes pour donner un témoignage ?

J'ai fait un cours à des élèves et cet incident-là s'est déroulé *après six mois de DEA*. Au bout d'un certain temps, tout le but du jeu c'est exactement de faire comme si on pouvait raisonner dans un truc simple dont on a l'habitude, c'est-à-dire un espace euclidien. Je comprends que ça soit très très délicat parce que, là, on était dans un cycle de formation spécialisé.

Et le même problème s'est posé : tous les gens qui avaient suivi ce cycle de formation étaient devant le même problème : comment est-ce qu'on peut arriver à faire une pirouette formelle, parce que finalement tout va être très simple quand on sera dans un espace euclidien. C'est un point très très délicat.

**Jean-Pierre Kahane :**

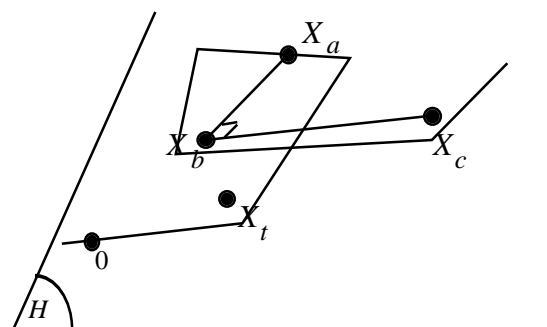
Oui. Là j'ai été un peu vertical. [rires] Mais, prenons une respiration ...

D'abord, je vais me restreindre — a priori ça ne va pas être beaucoup plus clair, peut-être même, ça sera plus obscur. Au lieu de prendre  $L^2(\Omega)$  tout entier, dont après tout j'ai donné une définition formelle, je vais me restreindre à une partie de  $L^2(\Omega)$ , constituée de variables gaussiennes centrées — gaus-

siennes, il faudrait que je vous explique pourquoi c'est important gaussien ... lisez Laplace !

Je vais donc maintenant prendre un espace  $H$  qui sera un sous-espace de Hilbert, mais disons tout simplement un sous-espace euclidien d'une infinité de dimensions, de  $L^2(\Omega)$ , avec la propriété que les éléments de  $H$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées. Pour ceux qui voudraient savoir comment ça se construit : tout simplement on prend une collection de variables normales indépendantes, on regarde ce que ça engendre ; ça engendre un espace qui admet ça comme base, parce que c'est indépendant et orthogonal, et vous avez une brave base euclidienne de cet espace que je vais admettre être à une infinité de dimensions, et là vous avez ce qu'on appelle les processus gaussiens. Ils sont centrés si j'admet que  $E(X_t)$  est toujours 0. Je vais me borner là.

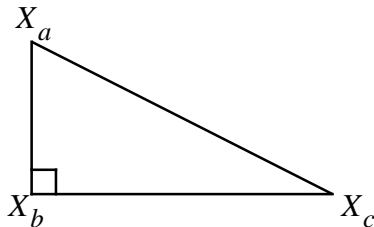
Je vais vous dessiner une courbe, et cette courbe va être le mouvement brownien, la version abstraite du mouvement brownien. Voilà la courbe que je vais vous dessiner, elle va avoir la même bobine que celle-ci, mais je suis forcé de la représenter en projection plane, elle est dans un espace à une infinité de dimensions.



Je vais partir du temps 0, j'ai un point  $X_t$  qui se balade, je vais représenter ici trois de ses positions — je vais les appeler  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  dans l'ordre. La propriété, la règle du jeu, ça va être que :  $X_b - X_a$ , espérance de ça au carré, c'est-à-dire le carré de la norme euclidienne, c'est égal à  $b - a$ .

Il reste que, un objet pareil, oui, ça existe, et je pourrais vous le montrer, en une minute. Mais je veux tirer une conclusion, très paradoxale. Regardez le triangle  $X_a, X_b, X_c$  : vous avez  $X_c - X_a$ , au carré, c'est  $c - a$ .  $c - a$ , c'est  $c - b + b - a$ , c'est donc  $X_c - X_b$ , au carré, plus  $X_b - X_a$ , au carré. Qu'est-ce que ça veut dire ?

Vous êtes dans un espace euclidien, je dirais même que, quand vous vous bornez aux points  $X_a, X_b, X_c$  vous êtes dans un plan : vous avez trois points, trois points c'est dans un plan. Et si je représente la chose dans un plan, voici ce que vous avez :  $X_a, X_b, X_c$  et le théorème de Pythagore. Ça, c'est un angle droit.



C'est un processus à accroissements orthogonaux. Les accroissements, à partir du point  $X_b$ , sont orthogonaux à tout ce qui s'est passé auparavant, à toute la partie de la courbe qui se trouve jusqu'à  $X_b$ .

Et, s'agissant des variables aléatoires dans un espace de Hilbert gaussien, c'est ça l'intérêt fondamental : *orthogonalité*, dans un espace de Hilbert gaussien, c'est la même chose que *indépendance*. Le mouvement brownien se trouvait ainsi être un processus gaussien, normalisé par cette condition, à accroissements indépendants dans le sens que les accroissements du futur sont indépendants du passé.

[Je vous ai dit que, en moins d'une minute, je pourrais vous démontrer l'existence de cet objet-là — qui faisait question, quand même, dans les années 1930. Tout simplement, vous prenez un modèle réduit d'espace de Hilbert qui va être  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , muni de la mesure de Lebesgue et vous allez considérer dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , le point  $1_{[0, t]}$ , fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, t]$  : vous pouvez considérer que c'est un point qui se balade dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$  — parce que la fonction indicatrice appartient à  $L^2(\mathbb{R}^+)$ .

Quelle est la norme de la fonction indicatrice ? Le carré, c'est la fonction elle-même ; son intégrale, c'est  $t$  ; la norme, c'est racine carrée de  $t$ . A ce moment-là, vous voyez facilement que norme de  $1_{X_b} - 1_{X_a}$  c'est norme de  $1_{[a, b]}$  et vous avez la règle fondamentale.

Il suffit maintenant de faire une application bijective isométrique de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  dans  $H$  pour avoir le modèle abstrait du mouvement brownien.]

### Sur le mouvement brownien.

J'avais préparé cinq introductions différentes du mouvement brownien. En voilà une, et c'est simplement parce que comme ça, en matière de plaisanterie, vous pouvez dire que vous savez ce que c'est que le mouvement brownien : c'est simplement une très belle hélice, extrêmement régulière, dans un espace de Hilbert.

C'est une courbe fascinante par sa beauté ; quand vous avez trois points dessus, ils forment toujours un triangle rectangle, et quand vous faites une translation dans les temps, vous faites un glissement de la courbe sur elle-même, une isométrie. Ça s'appelle une hélice, une courbe comme ça, telle que quand on translate les temps, on glisse sur la courbe, c'est une hélice.

C'est l'hélice brownienne.

Elle a une régularité absolument fantastique. Quand on lui applique les notions de dimension de Hausdorff, on s'aperçoit que c'est de dimension 2 quoique ça soit une courbe, que la mesure en dimension 2 entre 0 et  $t$  est exactement  $t$ , ça a des propriétés tout à fait magnifiques.

Il y a une chose qui m'a beaucoup amusé, c'est une fois qu'on m'a demandé : « est-ce qu'il y a des approximations de ça dans un espace euclidien à un grand nombre de dimensions ? » Oui il y a des approximations, mais certainement on ne pourra pas avoir, dans un espace à un nombre fini de dimensions, quelque chose qui ait autant de régularité, il y aura forcément un aspect plus fractal.

Je salue les autres développements sur le mouvement brownien. J'avais projeté, pour vous parler de l'actualité du mouvement brownien, de vous dire le contenu d'une note qui va paraître le mois prochain, d'Emmanuel Rio : c'est en fait une note sur le mouvement brownien, inspirée par la statistique — donc c'était le rapport avec le thème du jour. La statistique est une manière d'introduire le mouvement brownien, et les problèmes qui se posent à cet égard sont des problèmes très actuels, des questions non résolues. La note résout très partiellement un problème difficile — c'est pour faire un peu de publicité sur l'actualité du mouvement brownien.

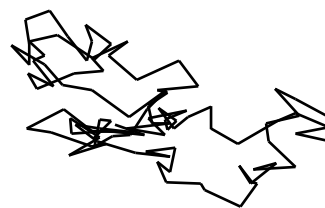
Plus généralement, le mouvement brownien ne fait pas partie de la culture commune des professeurs de lycées. Elle ne faisait pas partie de la culture commune des mathématiciens jusqu'à il y a relativement peu de temps. Je me souviens que, avec Dieudonné nous participions à un colloque en 73, à Boston, sur les objets mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle ; et j'avais un peu scandalisé Dieudonné en parlant à ce moment-là de mouvement brownien comme d'un objet central en mathématiques.

L'histoire du mouvement brownien est une histoire fascinante et c'est l'aspect agréable à raconter — je vais le sabrer en deux minutes, tant pis. Mouvement brownien, comme mouvement des particules en suspension dans un liquide, désordonné, éternel, contre les lois de la thermodynamique, apparemment indépendant de beaucoup de choses, c'est découvert par un botaniste anglais, Brown, dans les années 1830. Des physiciens s'en occupent, mais aucune théorie valable n'est élaborée, quoique certains physiciens aient l'intuition que ce mouvement désordonné des particules pourrait être dû à des chocs moléculaires.

C'est Einstein, en 1905, qui fait la théorie du mouvement brownien, et d'ailleurs — de même qu'il a fait la théorie de la relativité restreinte en ignorant l'expérience de Michelson — il a fait la théorie du mouvement brownien en ignorant le mouvement

brownien. Pour lui, il s'agissait d'une expérience à faire, d'un test pour déceler si la mécanique statistique dont on connaissait les vertus pour les gaz, était aussi applicable aux liquides. Il a un titre qui n'est pas *analyse du mouvement brownien* mais qui est un titre démesuré, avec des mots allemands kilométriques, disant à peu près *sur le mouvement rendu nécessaire par l'hypothèse atomique de particules en suspension dans un liquide*, quelque chose comme ça.

Donc, il établit à ce moment-là, que effectivement, pour ces particules, ce qui va être important ce n'est pas la notion de vitesse, mais c'est la notion de *déplacement quadratique moyen* ; ça c'est une idée très forte de Einstein. L'idée était dans l'air, car Smoluchowski en Pologne, faisait la même théorie en même temps. La théorie d'Einstein était plus achevée, était mieux connue, et en particulier elle a servi à Jean Perrin à multiplier les manip pour obtenir les dimensions atomiques. Le livre de Jean Perrin, *les atomes*, raconte cette aventure ; c'est un livre absolument fascinant. Vous avez là-dedans des descriptions du mouvement brownien tel qu'il se présente pour un expérimentateur, et qui au lieu d'être cette courbe magnifique mais dans un espace à une infinité de dimensions, est une courbe extrêmement irrégulière, c'est ... un modèle de fractalité, et d'ailleurs c'est un objet fascinant de l'analyse fractale.



Le mouvement brownien, donc, impossible de déceler les vitesses là-dedans, par contre les déplacements quadratiques moyens, oui. Et somme toute, implicitement chez Einstein, il y a cette figure. Sauf que ... il n'utilise pas la formalisation que j'ai utilisée. Mais, on peut justifier cette figure par différentes approches.

**Bachelier.**

L'approche du mouvement brownien c'est Einstein, le réinventeur du mouvement brownien. Et je disais que la chose était dans l'air, avec Smoluchowski, mais elle était mieux que dans l'air : elle avait déjà été formalisée d'autre façon, par un homme dont le nom n'a pas été associé pendant longtemps au mouvement brownien, malgré les efforts de Kolmogorov et de Paul Lévy : Bachelier.

La thèse de Bachelier, c'est 1900, c'est antérieur au mouvement brownien. Je dois avouer que, par exemple, je n'avais jamais lu la thèse de Bachelier ; et j'ai été absolument scandalisé de moi-même ... Bachelier n'appelle pas ça mouvement brownien parce que ce n'est pas de ça qu'il s'occupe — il s'occupe de la fluctuation des cours en Bourse — mais il s'occupe de la fluctuation des cours en Bourse pour faire une théorie, mathématique, de la spéculation financière.

Il fait cette théorie mathématique, et d'ailleurs j'ai appris beaucoup de finances là-dedans, et il dégage le fait qu'il s'agit de phénomènes aléatoires, qui sont imprévisibles mais dont on connaît quand même quelque chose. Il y a, connaissant une situation actuelle, une certaine manière de prévoir l'avenir — c'est les *probabilités conditionnelles*. Il dégage la loi des probabilités conditionnelles. Il établit la relation avec l'équation de la chaleur de Fourier, c'est-à-dire le rapport entre ce mouvement brownien, cette théorie, et les phénomènes de diffusion — parce qu'il pense à la diffusion de la chaleur comme modèle de la diffusion des probabilités.

La thèse de Bachelier est facile à lire et mon conseil c'est, quand vous aurez huit jours disponibles, de regarder la thèse de Bachelier, absolument passionnante. En ce moment, il y a un retour à Bachelier, il y a un séminaire Bachelier à l'Institut Henri Poincaré. Plus qu'à l'intérêt propre de Bachelier, c'est dû au fait que les mathématiques financières ont fait un bond considérable depuis 1973, avec des modèles qui utilisent très fort, non pas la

théorie ancienne du mouvement brownien, mais les calculs beaucoup plus avancés sur le mouvement brownien qu'on a faits à partir du milieu du siècle.

**Wiener.**

L'approche par l'hélice brownienne, ce n'est pas l'approche d'origine ; essentiellement, elle est apparue aussi dans les années 1950, mais le grand théoricien du mouvement brownien jusque là, ça a été Norbert Wiener. Et ce que j'avais projeté de vous faire, mais ça c'est long, c'est les diverses approches de Wiener du mouvement brownien : comment pour Wiener, le mouvement brownien établit comme un enjeu physique ; il y a une théorie nécessaire du mouvement brownien parce que le mouvement brownien se rencontre en physique.

Cela dit, comment constituer un modèle mathématique de la chose ? Comment constituer un processus, c'est-à-dire — il n'avait pas encore la terminologie que nous avons — comment constituer ces  $X_t(\omega)$  comme fonctions de deux variables, le temps et le hasard, qui permettent de rendre compte de l'allure du mouvement brownien ? Ça lui a pris quinze ans de sa vie, et il a eu des approches qui ont été assez différentes. Et on peut avoir en ce moment encore des approches différentes de celles de Wiener.

Donc, la justification de *processus du second ordre*, la justification de *processus gaussien*, c'est le mouvement brownien. Sur le mouvement brownien on peut parler longuement, c'est un objet fascinant, c'est un objet d'étude actuel.

Et quand je disais qu'il faut développer l'intuition mathématique, l'intuition en probabilités, je peux donner mon exemple personnel : je ne suis pas probabiliste, je n'avais jamais fait de probabilités, j'ai lu un livre de Paul Lévy dans le mémorial des sciences mathématiques, un livre qui s'appelle *le mouvement brownien*, qui date des années 1950, et que les mathématiciens considéraient

comme extrêmement difficile à lire. C'était l'époque où toutes les mathématiques étaient structurées et celles qui n'étaient pas structurées n'étaient pas des mathématiques. Or, dans Paul Lévy, ce n'était pas structuré du tout : c'était le roman du mouvement brownien.

Le mouvement brownien tel qu'on peut le toucher, tel qu'on peut le suivre, tel qu'il existe dans le plan. Quelle aire il balaye ? Comment est-ce qu'on le voit évoluer ? A quelle distance il se trouve ? C'était le mouvement brownien raconté comme une aventure. J'ai été fasciné par ça. Il y a le roman des mouvements browniens, il y a le mouvement brownien lui-même, ces particules qu'on suit, individuellement. Individuellement, c'est pour un  $\omega$  fixé.

Pour un  $\omega$  fixé, cette particule qui se déplace de façon extrêmement irrégulière, on peut l'étudier beaucoup plus globalement. A ce moment-là c'est une fonction de  $\omega$  qui est elle-même fonction de  $t$ , une variable aléatoire, plongée dans un espace  $H$ , et qui décrit comme trajectoire un truc admirablement régulier.

Cette dialectique entre l'extrême régularité du mouvement brownien dans la version abstraite du processus, et l'extrême irrégularité dans ses réalisations quand on fixe  $\omega$ , c'est l'un des charmes du mouvement brownien pour les mathématiciens, et la clef de beaucoup d'applications.

Mille excuses. J'ai dépassé mon temps de façon absolument scandaleuse. Maintenant on en vient à une phase plus active.

**[question, inaudible]**

**Jean-Pierre Kahane :**

Ça intervient de façon différente chez Einstein et chez Bachelier. Bachelier commence par établir ce que doit être la diffusion de la probabilité ; il obtient une équation différentielle de la diffusion de la probabilité ; il cherche à la résoudre ; il obtient des

variables gaussiennes, et avec l'expression explicite de la loi des variables gaussiennes, effectivement les moments du second ordre vont apparaître au cours du processus. C'est l'approche Bachelier.

L'approche Einstein. Je vais la simplifier à l'extrême. Pourquoi est-ce que ce qui intervient c'est plus la racine carrée du temps que le temps lui-même ? Qu'on pense au phénomène de diffusion comme à un phénomène physique. Vous avez un petit nuage d'argon ici et vous le laissez diffuser dans cette pièce. L'observation, et la théorie (avec les équations de la diffusion), vous montrent qu'au temps  $t$ , si  $t$  est grand, rien ne se passera à distance  $t$  ; la distance  $t$  c'est trop loin. Par contre, à la distance racine de  $t$ , oui. Et vous avez concentration de la diffusion au voisinage de racine de  $t$ .

Ce phénomène encore peut vous apparaître si vous pensez au phénomène du khi deux : dans le khi deux, quelle est l'interprétation ? L'interprétation, c'est que vous avez une variable gaussienne à valeurs dans un espace euclidien, et elle se trouvera concentrée à une distance de l'origine qui ne sera pas l'ordre mais la racine carrée de l'ordre : khi de  $n$  ça se trouvera concentré au voisinage de racine de  $n$ . Vous voyez que vous avez tout un faisceau d'arguments qui vous explique un petit peu l'intervention du carré.

**[intervention, inaudible]**

**Jean-Pierre Kahane :**

Imaginez non pas la particule brownienne que vous voyez dans un liquide, mais imaginez plutôt un mouvement désordonné dans l'espace. Pensez à l'espace à trois dimensions. Pensez à un nuage d'objets qui se répand au hasard. Pensez à l'évolution de ce nuage.

D'abord l'évolution de la forme vous donne une première indication. La forme va être grossièrement sphérique, et la sphère, dans l'espace à deux dimensions comme dans l'espace à trois dimensions, aura un rayon racine carrée du temps, non pas un rayon

temps : c'est la diffusion. Egalement, au bout du temps  $t$ , si vous observez le nuage de points, vous avez une distribution gaussienne. Ça vous dit : au bout du temps  $t$ , quand  $t$  est fixé, vous avez un nuage de points avec une distribution gaussienne ; ça justifie assez bien que l'on considère un espace de Hilbert gaussien pour modéliser la chose.

Mais ce qui est important, ce n'est pas seulement que en chaque temps, vous ayez cette forme, c'est l'évolution de la forme au cours du temps. C'est le fait que si vous avez la forme au temps  $t$  et au temps  $t + dt$ , l'évolution de la forme correspond à un déplacement individuel des particules, et ce déplacement est lui-même de l'ordre de racine carrée de  $dt$ . C'est le phénomène de diffusion de la probabilité : on peut dire que chaque particule va rayonner comme si elle était, à son tour, le centre dont on parlait. Ce rayonnement de la probabilité, il suffit de le mettre en équations pour arriver effectivement aux lois du mouvement brownien.

Donc, cette hélice, qu'est-ce qu'elle représente ? Elle ne représente pas  $X_t$ , la position d'un point ; elle représente la position, dans un espace à une infinité de dimensions, du nuage de points, et elle indique la façon dont ce nuage évolue non seulement dans sa forme globale, mais dans sa composition.

***Pierre Duchet :***

J'aurais voulu un éclaircissement sur le phénomène de variable aléatoire dans le plan et dans l'espace, les comportements différents de l'ivrogne dans le plan et dans l'espace.

***Jean-Pierre Kahane :***

L'une des sources pour le comprendre bien, c'est la promenade au hasard sur un quadrillage. C'est la promenade au hasard, et la méditation sur la promenade au hasard. Un cours de probas serait fait simplement d'une méditation sur la promenade au hasard, il y aurait tout là-dedans.

Prenons le cas du plan. C'est une ville qui est complètement quadrillée, comme Buenos-Aires, par exemple ; et l'ivrogne se déplace. Il va d'un coin de rue à un autre ; et puis, quand il est arrivé à un coin de rue, ici, alors il tourne sur lui-même : il ne sait pas où aller, il va au hasard dans l'une des quatre directions qui s'offrent à lui, y compris la direction d'où il vient. Donc à chaque instant, il a les mêmes chances d'aller par là. Alors, il va se promener, cet ivrogne. On peut naturellement parler de la promenade au hasard sur la droite — ça je peux beaucoup plus facilement l'imiter, il avance comme ça, il recule, et caetera [Jean-Pierre Kahane joint le geste à la parole en se déplaçant entre tableau et tribune] ; à chaque instant, il occupe une position, et on peut étudier la courbe qu'il décrit, la trajectoire.

Sur la droite, c'est à peu près évident que partant d'un point 0, il va passer ensuite au point 1, au point 2, au point 1, au point 2, et caetera, presque sûrement il va recroiser le point 0. C'est intuitif.

Dans le plan, est-ce que c'est si intuitif ? Partant d'ici, est-ce qu'il va y revenir ? C'est moins intuitif, c'est un théorème : il va y revenir. Mais ce n'est pas tellement évident.

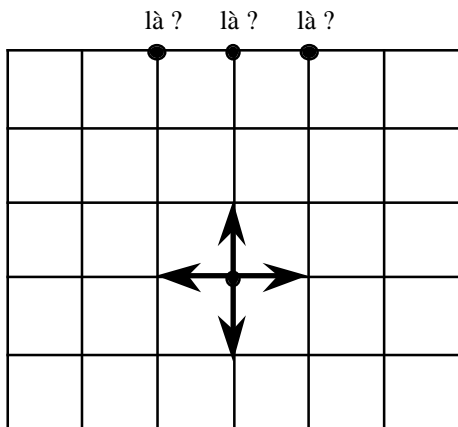
Promenade dans l'espace. Est-ce qu'il va y revenir ? Non, il ne va pas y revenir. Ça, ça donne une idée sur le mouvement brownien : le mouvement brownien est une sorte d'image continue de ces promenades au hasard discrètes.

Et effectivement, pour le mouvement brownien sur la droite, la trajectoire revient presque sûrement ; elle balaye une infinité de fois toute la droite. On peut se dire : dans le plan, à cause de cette analogie, elle doit balayer une infinité de fois tout le plan. Pas vrai. Elle balaye dans le plan un ensemble de dimension deux, mais qui n'est pas tout le plan ; qui est d'aire nulle, de mesure deux-dimensionnelle nulle. Au surplus ce n'est pas très difficile à démontrer.

Et dans l'espace ?

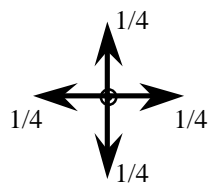
Dans l'espace, on pourrait se dire : oh, il ne peut pas y avoir de points doubles. Si, il y a des points doubles ; mais en dimension supérieure, il n'y en a plus. Ça, ça fait partie de la botanique des mouvements browniens.

Maintenant, pour la philosophie du mouvement brownien, ceci c'est un exemple tout à fait remarquable parce que : on peut se demander, quand vous avez une frontière, quelle est la probabilité d'atteindre les différents points de la frontière ? La frontière va être atteinte, par l'ivrogne, quelque part, au bout d'un certain temps — le temps pour le moment, je ne m'en occupe pas. Mais le point où ça va arriver ...



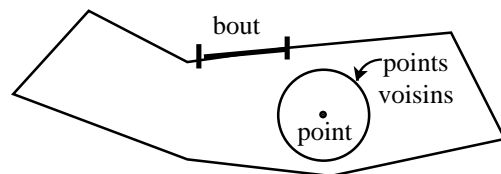
Oh, ça ne va certainement jamais arriver au coin. Vous voyez, il n'y a aucun moyen d'arriver au coin a priori. Mais est-ce que ça va arriver là, là, là ?

Mais comment mettre le problème en équations ?



Ce n'est pas très difficile, parce que, quand vous êtes ici, vous avez une probabilité  $1/4$  d'arriver là, vous avez une probabilité  $1/4$  d'arriver là. Que, par exemple, ce point-là soit atteint, ça va s'exprimer, en termes de probabilités, comme une fonction du point de départ ; et une fonction du point de départ qui va avoir la propriété de moyenne.

Si vous partez d'un point, pour arriver à un bout de la frontière, vous êtes bien forcés de passer par un point intermédiaire, à une certaine distance du point donné. Et la probabilité que partant de ce point-là, la portion de frontière que vous atteignez soit ici, et pas ailleurs, ça va être la moyenne des probabilités analogues sur les points voisins.



Comment ça s'appelle, une fonction qui a une propriété de moyenne comme ça ?

Ça s'appelle une *fonction harmonique*.

Comment ça s'appelle déterminer une fonction harmonique qui ait la valeur 1 sur une portion de la frontière et la valeur 0 ailleurs ?

Ça s'appelle *un problème de Dirichlet*. C'est la résolution du problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques par la promenade au hasard ou le mouvement brownien.

Interprétation pour le mouvement brownien : c'est ce mouvement désordonné des particules. Interprétation pour le quadrillage, interprétation la plus simple, c'est une théorie du potentiel électrique. Vous vous donnez ici le potentiel 1, partout ailleurs à la frontière, le potentiel 0. Vous regardez l'équilibre du potentiel à l'intérieur, résultant du courant stationnaire qui va s'établir.

Le courant stationnaire va avoir cette propriété de Kirchhoff, qui est la propriété de moyenne, et par conséquent le potentiel à l'intérieur va s'établir suivant cette probabilité d'atteinte d'un point de la frontière par une promenade au hasard. C'est la liaison fondamentale entre potentiel et mouvement brownien.

Il y a maintenant un lien entre probabilité et potentiel, au point que l'ouvrage fondamental, de référence, en probabilités, c'est peut-être l'ouvrage de Paul-André Meyer sur *probabilités et potentiel*. Vous avez ici, sur ce modèle réduit (le potentiel électrique et le mouvement au hasard sur un quadrillage) le rapport entre promenade au hasard et potentiel. Au surplus, il y a une foule d'exercices de mathématiques que vous pouvez faire là-dessus.

**Eric Brian [presque inaudible] :**

[Eric Brian intervient pour faire deux commentaires :

- il annonce d'abord qu'il pourra montrer pendant sa conférence de l'après-midi, l'économiseur d'écran qu'il a programmé sur son ordinateur portable, comme illustration du mouvement brownien ;
- il explique ensuite que ce lien entre probabilités et potentiel est très lié aux calculs qui se font aujourd'hui, et que c'est aussi un point capital de l'histoire des probabilités : le recours au calcul des combinaisons avec le triangle de Pascal ; comme on peut faire comprendre l'espace des possibles en envisageant toutes les combinaisons possibles, c'est l'exemple pédagogique par excellence.]

**Jean-Pierre Kahane :**

Le triangle de Pascal, vous l'avez avec la promenade au hasard de façon absolument lumineuse. La difficulté, c'est que, comme d'ailleurs c'était clair dans votre introduction, Madame, pour comprendre un petit peu l'actualité des probabilités, il faut remonter à leur histoire.

Là effectivement, j'ai shunté l'histoire et c'est dommage, mais vous aurez l'histoire cet après-midi, un morceau de l'histoire !

Je voulais vous dire une chose sur l'histoire parce que je ne suis pas sûr que Eric Brian vous le dise — comme lui, il sait les choses, il n'a pas besoin de les apprendre, mais, moi j'avais besoin d'apprendre les choses pour avoir des éléments d'histoire.

Alors, qu'est-ce que je fais ? Je prends l'Encyclopaedia Universalis, et je consulte les articles de l'Encyclopaedia Universalis. Là, c'est absolument extraordinaire.

Vous consultez l'article *probabilités*, vous n'avez rien sur l'histoire des probabilités. Vous avez au moins l'étymologie du terme *hasard*.

Vous regardez à *hasard* : vous n'avez rien sur *hasard* et en particulier pas son étymologie.

Vous regardez *statistiques* : vous avez quelques indications sur la naissance de la statistique et son lien aux probabilités, mais pas grand chose ...

Si vous voulez avoir des bonnes références, y compris Pascal, Huygens — qui est plus complet que Pascal à la même époque — et si vous voulez avoir la statistique et la façon dont ça apparaît, les différences dans la façon dont ça apparaît en Angleterre et en France, et caetera, qu'est-ce qu'il faut consulter ?

[...]

Il faut consulter l'article *assurance* de l'Encyclopaedia Universalis ! Dans l'article *assurance* de l'Encyclopaedia Universalis, vous avez une bonne histoire sur *probabilités et statistiques*. Ça c'est le tuyau le plus important que je peux vous donner.

[*question, inaudible*]

[sur comment Jean-Pierre Kahane a eu l'idée de regarder l'article *assurance* ? rires]

**Jean-Pierre Kahane :**

C'est le mouvement brownien dans l'Encyclopaedia Universalis [rires]. A cet égard, il y a tout un aspect à élaborer sur la nécessité du mouvement brownien en matière de recherche. Dans la programmation de la recherche, il y a une idée d'optimisation, qui n'est pas toute fausse, mais qui est globalement fausse quand même. La recherche n'est efficace que si elle est couvrante, et pour être couvrante, il faut qu'elle aille largement au hasard. Cela dit, le hasard est toujours fonction de lois sous-jacentes, les lois dépendent des individus, de leurs contextes, etc.