la forme des nombres

par MM. Salim Ayache, Siham Cherid, Jonathan Ridarch, avec la participation de M. Massalé Traoré, élèves de CM_2, 6ème et 5ème du **collège André Doucet de Nanterre (92)** et de l'**école Voltaire de Nanterre (92)**

enseignants :
Mmes Danièle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud, M. Marc Douaire

chercheur :
M. Pierre Duchet

[Note du chercheur : le travail hebdomadaire des écoliers était intégré à leur emploi du temps (1h1/4 par semaine). Les collégiens travaillaient 2h par semaine en plus de leur horaire habituel.]

coordination article : Mme Marie-Christine Chanudeaud

compte-rendu de parrainage :

Trois joyeux galopins, en CM_2 et 6° de Nanterre, nous ont exposé comment représenter les nombres sous forme géométrique en remarquant que les multiples de 2 ou 3 prenaient la forme de triangles et de rectangles. Les nombres premiers, eux, ne se laissent pas représenter. Malheureusement, le "stress" d'être les premiers, et leur jeune âge, les ont poussés à lire leurs résultats plus que de les présenter ; mais il s'agissait d'une vraie recherche personnelle.

N — La forme des nombres : carré, triangle, … 21

En disposant *n* pions d'une manière ordonnée sur une feuille, on peut parfois dessiner une forme simple. Quels nombres peuvent ainsi obtenir une forme agréable (carré, triangle, losange, trapèze, rectangle, disque, …) ?

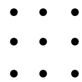
Les rectangles et les ronds sont encore énigmatiques pour les mathématiciens.

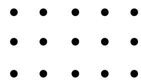
Certains nombres ont la propriété de pouvoir être représentés par des formes simples.

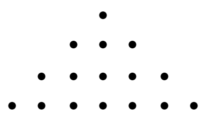
A l'aide de quelles formes géométriques peut-on représenter les nombres ?

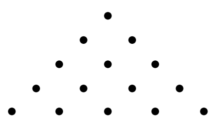
On a travaillé sur les carrés, les triangles pleins et creux, et les rectangles ; on a aussi expliqué avec des chiffres.

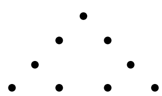
exemples :

3×3  carré

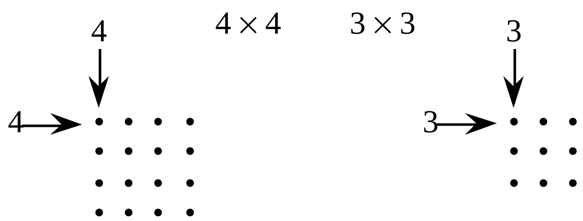
3×5  rectangle

16  triangle "isocèle" plein

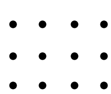
15  triangle "équilatéral" plein

9  triangle "équilatéral" creux

Des tables de multiplication et des points.

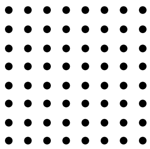


On multiplie le nombre par lui-même, 3 par 3, 4 par 4 pour le carré.

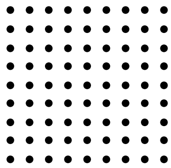
Exemple : 16 points  carré

Les nombres qui peuvent être représentés • • • par des carrés.

64



81



1	4	9	16	25	36 …
1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6

Règle 1 : On multiplie un nombre par lui-même, donc ces nombres sont de la forme $n \times n$, c'est-à-dire n^2.

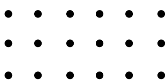
Les nombres qui peuvent être représentés • • • par des rectangles.

6 . 8 . 12 . 15 . 18 . 20 . 21 . 24 . 27 . 28 . 14 . 10 . 22 . 26 . 30 …

[Note du chercheur : Pour les élèves, et conformément à ce que j'avais suggéré, une simple ligne de points n'est pas un rectangle. On remarque par ailleurs l'absence des nombres précédents dans cette liste : pour nombre d'écoliers, un carré n'est pas un rectangle. L'absence de $16 = 2 \times 8$ et de $36 = 4 \times 9$ dans la liste est plus troublante.]

Exemple :

18 points



rectangle

Règle 2 : On multiplie les nombres 6 et 3 pour ce rectangle.

Les nombres qui peuvent être représentés • • • par des triangles "équilatéraux" creux.

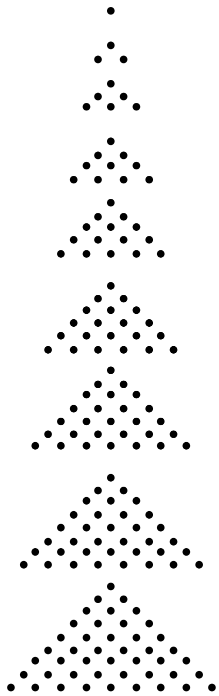
3	6	9	12	…
1×3	2×3	3×3	4×3	

Règle 3 : On multiplie un nombre par 3. Donc, ces nombres sont de la forme $3 \times n$.

Les nombres qui peuvent être représentés • • • par des triangles "équilatéraux " pleins.

Avec un triangle, on ne peut pas obtenir simplement le nombre de points par multiplication comme pour les rectangles : ce n'est pas une somme "identique" [c'est-à-dire une somme de nombres tous égaux].

n°			
1	1	0+1	1×1
2	3	1+2	
3	6	3+3	2×3
4	10	6+4	
5	15	10+5	3×5
6	21	15+6	
7	28	21+7	4×7
8	36	28+8	
9	45	36+9	5×9



Règle 4 : Pour trouver le nombre de points du triangle de rang impair, on multiplie le numéro du triangle par sa moitié à qui on ajoute 0,5.

$$n \times \left(\frac{n}{2} + 0,5\right) = n \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Règle 5 : Pour trouver le nombre de points du triangle de rang pair, on multiplie la moitié du numéro du triangle par le numéro du triangle suivant.

$$\frac{n}{2} \times (n+1)$$

☞ On remarque que dans tous les cas le nombre de points d'un triangle plein est :

$$\frac{n}{2} \times (n+1)$$

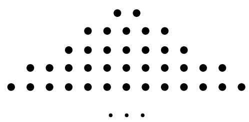
Les nombres qui ne sont pas représentés :

5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29 . . .

Conclusion.

Il y a des nombres qui ne peuvent se mettre ni sous la forme de carré, ni sous la forme de rectangle, ni sous la forme de triangle creux ou plein. Ces nombres sont 2, 5, 7, 11, 13 …

On nous a dit que ces nombres sont des **nombres premiers**.



[**Commentaire du chercheur** :

Ce sujet a été l'occasion pour les plus jeunes de découvrir une certaine régularité numérique dans des objets géométriques simples, et de sentir l'intérêt de règles de fabrication systématique (avec, en filigrane, le concept d'algorithme) pour décrire sans ambiguïté une forme donnée.

Par exemple, une description de la construction d'un triangle (équilatéral) plein du type « on dessine *n* lignes ; la première a un seul point ; chaque ligne comporte un point de plus que la précédente » est difficile à concevoir, et donc à formuler pour les élèves.

Dans leur rédaction finale, ils n'ont retenu que les résultats qui leur paraissaient les plus marquants.

Il est à noter que la forme :

$$\frac{n}{2} \times (n + 1)$$

pour les nombres triangulaires a été obtenue en parallèle dans les deux groupes (écoliers et collégiens) comme une règle de calcul **observée**, dont le caractère systématique (précurseur d'une preuve par récurrence) n'a été vu que sous forme d'énumération séquentielle (voir la colonne de droite dans leur tableau).

Les formes trapèze, losange, triangle isocèle ont été également inventoriées par les élèves, mais avec des résultats plus lacunaires que pour les séries proposées.

Un des mérites de ce sujet pour des élèves de primaire et du premier cycle secondaire est qu'il conduit à une bonne maîtrise de la *dénotation* mathématique : n pour désigner un nombre variable, n^2 pour désigner une élévation au carré.] [NDLC : on (dé?)notera que le vocabulaire détonne avec celui des élèves.]