systèmes balançaires

par Mlle Alexia Rousseau (5ème) et Mlle Elodie Rangass-Amy, MM. Samuel Gonçalves, Driss Ourgcin (CM_2), avec la participation de M. Olivier Cyrille, Mlles Nélie El Haoud, Zohra Hassani, Samia Larabi, M. Davin Sébastien, élèves de 6ème et 5ème du **collège André Doucet de Nanterre (92)**, établissement jumelé avec **l'école Voltaire de Nanterre (92)**

enseignants :
Mmes Danièle Buteau, Marie-Christine Chanudeaud
M. Marc Douaire

chercheur :
M. Pierre Duchet

[Note du chercheur : le travail hebdomadaire des écoliers était intégré à leur emploi du temps (1h1/4 par semaine). Les collégiens travaillaient 2h par semaine en plus de leur horaire habituel.]

coordination article : Mme Marie-Christine Chanudeaud

Pas de compte-rendu de parrainage.

NI — Systèmes de numération balançaires. **32**
Présentation de Posters
École primaire Voltaire (demi-classe de CM_2) et Collège A. Doucet (6ème-3ème), Nanterre

En mettant certains poids tous différents, chacun en 1 seul exemplaire, (par exemple des poids de 1, 3, 9 et 27 g), à droite, à gauche ou pas du tout, on arrive à peser ainsi un objet en équilibrant une balance. Une pesée réussie permet donc de coder un nombre (le poids de l'objet) à l'aide de trois signes : “droite”, “gauche”, “pas du tout”. Comment effectuer les opérations usuelles (addition, soustraction, …) dans un tel système ? Des codages similaires de nombres sont maintenant utilisés pour accélérer les calculs sur ordinateur.

Pour peser des objets on peut utiliser une balance à deux plateaux et un jeu de masses dont on connait le poids. Lorsque l'équilibre est réalisé avec l'objet sur un plateau, on déduit par un calcul simple le poids de l'objet.

Exemple : les masses connues ont des poids de 1, 3, 7 et 17 (peu importe l'unité de poids).

[**15** 3] [17 1]

Le poids de l'objet est 15 puisque 15+3 = 17+1.

On peut utiliser ce principe d'équilibre pour coder les nombres. Un système de poids étant fixé, on choisit (une fois pour toutes) un ordre d'écriture pour ces poids connus, par exemple 17, 7, 3, 1, et un plateau (toujours le même, le gauche par exemple) sur lequel on pose le nombre (on pose un objet dont le poids est le nombre). Pour coder le nombre, on réalise alors une position d'équilibre et on l'écrit en marquant la position de chaque poids de notre système.

Si un poids a été mis à droite, on marque DI.
Si un poids a été mis à gauche, on marque GA.
Si un poids n'a pas été mis, on marque NO.

La succession des marques DI, GA, NO, dans l'ordre fixé des poids de notre système, est une écriture du nombre. Ainsi dans le système 17, 7, 3, 1, le nombre 15 peut s'écrire DINOGADI.

[**15** 3] [17 1] DI NCGADI

Un tel système d'écriture des nombres est appelé, par leur inventeur Pierre Jullien, un système balançaire.

Pierre Jullien propose le système balançaire basé sur 1, 3, 9, 27 etc, pour écrire les nombres entiers. Nous avons étudié 2 systèmes balançaires : 1, 3, 9, 27 et 1, 3, 7, 17.

Système balançaire 1, 3, 9, 27.

Nous avons écrit les nombres jusqu'à 40 :

			27	9	3	1
[**1**	]	[1]				DI
[**2**	1]	[3]			DI	GA
[**3**	]	[3]			DI	NO
[**4**	]	[3 1]			DI	DI
[**5**	3 1]	[9]		DI	GA	GA
[**6**	3]	[9]		DI	GA	NO
[**7**	3]	[9 1]		DI	GA	DI
[**8**	1]	[9]		DI	NO	GA
[**9**	]	[9]		DI	NO	NO
[**10**	]	[9 1]		DI	NO	DI
[**11**	1]	[9 3]		DI	DI	GA
[**12**	]	[9 3]		DI	DI	NO
[**13**	]	[9 3 1]		DI	DI	DI
[**14**	9 3 1]	[27]	DI	GA	GA	GA
[**15**	9 3]	[27]	DI	GA	GA	NO
[**16**	9 3]	[27 1]	DI	GA	GA	DI
[**17**	9 1]	[27]	DI	GA	NO	GA
[**18**	9]	[27]	DI	GA	NO	NO
[**19**	9]	[27 1]	DI	GA	NO	DI
[**20**	9 1]	[27 3]	DI	GA	DI	GA
[**21**	9]	[27 3]	DI	GA	DI	NO
[**22**	9]	[27 3 1]	DI	GA	DI	DI
[**23**	3 1]	[27]	DI	NO	GA	GA
[**24**	3]	[27]	DI	NO	GA	NO
[**25**	3]	[27 1]	DI	NO	GA	DI
[**26**	1]	[27]	DI	NO	NO	GA
[**27**	]	[27]	DI	NO	NO	NO
[**28**	]	[27 1]	DI	NO	NO	DI
[**29**	1]	[27 3]	DI	NO	DI	GA
[**30**	]	[27 3]	DI	NO	DI	NO
[**31**	]	[27 3 1]	DI	NO	DI	DI
[**32**	3 1]	[27 9]	DI	DI	GA	GA
[**33**	3]	[27 9]	DI	DI	GA	NO
[**34**	3]	[27 9 1]	DI	DI	GA	DI
[**35**	1]	[27 9]	DI	DI	NO	GA
[**36**	]	[27 9]	DI	DI	NO	NO
[**37**	]	[27 9 1]	DI	DI	NO	DI
[**38**	1]	[27 9 3]	DI	DI	DI	GA
[**39**	]	[27 9 3]	DI	DI	DI	NO
[**40**	]	[27 9 3 1]	DI	DI	DI	DI

Exemple :

[**15** 9 3] [27] DI GA GA NO

Additions.

Pour faire des additions, nous avons remarqué que, quelle que soit la colonne, 1, 3 ou 9 :

GA	DI	GA	NO	DI	GA
+ DI	+ NO	+ NO	+ NO	+ DI	+ GA
= NO	= DI	= GA	= NO	= DI GA	= GA DI

27 9 3 1

1 DI
[ ] [**+ 1**] + DI
--------------- -------------- ----------------
[1] [3] = DI GA

3 DI
[ ] [**+ 3**] + DI
--------------- -------------- ----------------
[3] [9] = DI GA

9 DI
[ ] [**+ 9**]+ DI
--------------- ------------- ------------
[9] [27]= DI GA

27 9 3 1

1 GA
[**+ 1**] [ ] + GA
--------------- -------------- ----------------
[3] [1] = GA DI

3 GA
[**+ 3**] [ ] + GA
--------------- -------------- ----------------
[**9**] [3] = GA DI

9 GA
[**+ 9**] [ ]+ GA
--------------- ------------- ------------
[27] [9]= GA DI

etc.

Nous savons donc faire des additions.

Exemples :

```
        27  9  3  1              27  9  3  1


           DI GA DI                 DI NO GA GA
        +     DI DI              +     DI DI GA
        -----------------        -------------------
 a)           DI GA                       GA DI
 b)        DI NO                    DI DI NO
        -----------------        -------------------
 c)     =  DI DI GA              =  DI DI GA DI
```

Explications :

On additionne colonne par colonne DI GA DI + DI DI : DI + DI dans la colonne des 1 fait DI GA (cf ligne *a*) ; GA +DI dans la colonne des 3 fait NO (cf ligne *b*). Puis on additionne les lignes *a* et *b* : GA dans la colonne des 1 fait GA (cf ligne *c*) ; DI + NO dans la colonne des 3 fait DI (cf ligne *c*) ; DI dans la colonne des 9 fait DI (cf ligne *c*). Donc :

DI GA DI + DI DI = DI DI GA

Mais, quel poids faut-il ajouter si l'on veut écrire des nombres supérieurs à 40 ?

Si nous supposons que DI + DI dans la colonne des 27, fait aussi DI GA, quel autre poids *X*, faut-il utiliser pour pouvoir écrire le résultat de DI GA DI DI + DI NO GA DI ?

```
     27  9  3  1

     DI GA DI DI        25
  +  DI NO GA DI        22
  ------------------
     DI     DI GA            X  27  9  3  1
     DI GA NO
  ------------------
     ?? GA DI GA                   GA DI GA
                     ??      DI GA
                          ----  --------------------
                          =  DI GA GA DI GA      47    X = 81
```

Avec 81, 27, 9, 3, 1 nous pouvons compter jusqu'à 121 et pour compter plus loin, nous avons trouvé qu'il fallait utiliser :

```
     x3      x3     x3     x3     x3     x3
729     243     81     27      9      3      1
```

Ainsi, nous pouvons écrire tous les nombres entiers.

Exemples :

```
                                                 729  243  81  27  9  3  1
[227        27      1 ]  [243           9 3 ]
[_____________________]  [__________________]         DI  NO  GA  DI  DI  GA

[300        27        ]  [243  81         3 ]
[_____________________]  [__________________]         DI  DI  GA  NO  DI  No

[405      243   81    ]  [729               ]
[_____________________]  [__________________]    DI   GA  GA  NO  NO  NO  NO
```

Soustractions.

Pour faire des soustractions, nous avons cherché à équilibrer des ballons qui tiraient le plateau de la balance vers le haut.

Exemple : ¶ 32 et ¶ 15

```
                                                  27  9  3  1
  32
[      27   9        ]  [             3   1 ]    GA GA DI DI
[____________________]  [___________________]

  15
[      27            ]  [          9   3    ]    GA DI DI NO
[____________________]  [___________________]
```

Nous remarquons que :

¶ 32 s'écrit	GA GA DI DI
et que 32 s'écrit	DI DI GA GA
¶ 15 s'écrit	GA DI DI NO
et que 15 s'écrit	DI GA GA NO

il faut donc changer DI en GA et réciproquement pour passer du poids 32 au ballon ¶ 32. Pour soustraire 32, nous ajouterons donc ¶32.

Exemple : Pour soustraire 20, nous ajouterons ¶ 20.

```
   DI NO DI GA      29       DI NO DI GA
 - DI GA DI GA     - 20    + GA DI GA DI
 ---------------           ---------------
                            = NO DI NO NO       9
```

Système balançaire 1, 3, 7, 17.

Nous avons écrit les nombres jusqu'à 28 :

			17	7	3	1
[**1**	][	1]				DI
[**2**	1][	3]			DI	GA
[**3**	][	3]			DI	NO
[**4**	][	3 1]			DI	DI
[**5**	3][	7 1]		DI	GA	DI
[**6**	1][	7]		DI	NO	GA
[**7**	][	7]		DI	NO	NO
[**8**	][	7 1]		DI	NO	DI
[**9**	1][	7 3]		DI	DI	GA
[**10**	][	7 3]		DI	DI	NO
[**11**	][	7 3 1]		DI	DI	DI
[**12**	7 1][	17 3]	DI	GA	DI	GA
[**13**	3 1][	17]	DI	NO	GA	GA
[**14**	3][	17]	DI	NO	GA	NO
[**15**	3][	17 1]	DI	NO	GA	DI
[**16**	1][	17]	DI	NO	NO	GA
[**17**	][	17]	DI	NO	NO	NO
[**18**	][	17 1]	DI	NO	NO	DI
[**19**	1][	17 3]	DI	NO	DI	GA
[**20**	][	17 3]	DI	NO	DI	NO
[**21**	][	17 3 1]	DI	NO	DI	DI
[**22**	3][	17 7 1]	DI	DI	GA	DI
[**23**	1][	17 7]	DI	DI	NO	GA
[**24**	][	17 7]	DI	DI	NO	NO
[**25**	][	17 7 1]	DI	DI	NO	DI
[**26**	1][	17 7 3]	DI	DI	DI	GA
[**27**	][	17 7 3]	DI	DI	DI	NO
[**28**	][	17 7 3 1]	DI	DI	DI	DI

Exemple :

[**15** 3] [17 1] DI NCGADI

Additions.

Pour faire des additions, nous avons remarqué que

DI	DI	GA	NO
+ GA	+ NO	+ NO	+ NO
---- -----	---- -----	---- -----	---- -----
= NO	= DI	= GA	= NO

mais, pour DI + DI et GA + GA, le résultat n'est pas le même selon les colonnes.

17 7 3 1

1 DI
[ ][**+ 1**] + DI
--------------- -------------- ----------------
[1][3] = DI GA

3 DI
[ ][**+ 3**] + DI
--------------- -------------- ----------------
[1][7] = DI NO GA

7 DI
[ ][**+ 7**] + DI
--------------- ------------- ------------
[3][17] =DI NO GA NO

17 7 3 1

1 GA
[**+ 1**][ ] + GA
--------------- -------------- ----------------
[3][1] = GA DI

3 GA
[**+ 3**][ ] + GA
--------------- -------------- ----------------
[7][1] = GA NO DI

7 GA
[**+ 7**][ ]+ GA
--------------- ------------- ------------
[17][3] =GA NO DI NO

Nous savons donc faire des additions.

Exemples :

```
17   7   3   1                 17   7   3   1

     DI  NO DI                      DI  NC GA GA
+    DI  DI  NO                +         DI  DI  GA
---- ---- ---- -----           ---- ---- ---- ---- -----
         DI  DI                              GA DI
DI  NO GA NO                        DI  DI  NO
---- ---- ---- -----           ---- ---- ---- ---- -----
DI  NO NO DI                   =    DI  DI  GA DI
```

Le problème est qu'***avec 1, 3, 7, 17 certains nombres ont deux écritures possibles***.

Exemples :

```
       17   7   3   1

[                DI  NO
[           DI  GA GA              3

[                DI  DI
[           DI  GA NO              4

[           DI  NO NO
[     DI  GA GA NO                 7

[           DI  NO DI
[     DI  GA GA DI                 8

[           DI  DI  GA
[     DI  GA NO GA                 9

[           DI  DI  NO
[     DI  GA NO NO                10

[           DI  DI  DI
[     DI  GA NO DI                11

[     DI  NO DI  DI
[     DI  DI  GA NO               21
```

Mais, quel poids faut-il ajouter si l'on veut écrire des nombres supérieurs à 28 ?

Nous avons trouvé que DI + DI font

> DI GA dans la colonne des 1
> DI NO GA dans la colonne des 3
> DI NO GA NO dans la colonne des 7

si nous supposons que DI + DI fait

> DI NO GA NO NO dans la colonne

des 17, quel autre poids *X*, faut-il utiliser pour pouvoir écrire le résultat de

DI DI DI NO + DI NO DI ?

```
   17   7   3   1                 X  17   7   3   1

   DI  DI  DI  NC         27
+       DI  NC DI          8
----- ----- ----- ----- -----
   DI       DI  DI
   DI  NO GA NO
----- ----- ----- ----- -----
   ?? NO NC DI                            NO NC DI
                    ??             DI  NC GA NC NO
                              ---- ----- ----- ----- ----- -----
                              =    DI  NC GA NC DI         35     X = 41
```

Avec 41, 17, 7, 3, 1 nous pouvons compter jusqu'à 69 et pour compter plus loin, nous avons trouvé qu'il fallait utiliser :

2x99 +41	2x41 +17	2x17 +7	2x7 +3	2x3 +1	2x1 +1	
239	99	41	17	7	3	1

Ainsi, nous pouvons écrire tous les nombres entiers. Exemples :

```
                                                    239  99  41  17  7  3  1
[227        17      3 ]   [239         7      1 ]
[_____________________]   [_____________________]    DI  NO  NO  GA  DI  GADI

[300                  ]   [239        41  17  3 ]
[_____________________]   [_____________________]    DI  NO  DI  DI  NO DI NO

                                                3
[405                1 ]   [239  99    41  17  7 ]
[_____________________]   [_____________________]    DI  DI  DI  DI  DI DI GA
```

Comparaisons.

Le système 1, 3, 9, 27 est plus facile à utiliser que le système 1, 3, 7, 17 parce que,

dans le système 1, 3, 7, 17

• certains nombres peuvent s’écrire de plusieurs façons ;

• la somme DI + DI par exemple ne donne pas le même résultat dans toutes les colonnes (1, 3, 7, 17) ;

• les additions ne sont pas faciles à faire.

alors que, dans le système 1, 3, 9, 27

• les nombres ne s’écrivent que d’une seule façon ;

•la somme DI + DI par exemple, donne toujours DI GA, quelle que soit la colonne (1, 3, 9, 27, …) ;

• les additions sont faciles à faire.

épilogue.

Après le Congrès, nous avons cherché à faire les additions dans tous les cas possibles. Nous avons essayé

```
                                          239  99  41  17   7   3   1
[___ _   _________]   [__17___  17___]               DI
                                                   + DI
                                                  ----------------
[___      7       ]   [      41      ]             DI NO GA NO NO

[___ _   _________]   [  41___  41___]           DI
                                               + DI
                                              ----------------
[___ _   17_______]   [ ____99 ______]         DI NO GA NO NO NO

[___ _   _________]   [  99___  99___]       DI
                                           + DI
                                          ----------------
[___ _   41_______]   [ ___239 ______]     DI NO GA NO NO NO NO
```

Nous nous sommes aperçus que quelle que soit la colonne :

```
.....     ....   DI   ....   ....
          +      DI
        ----------------------
          DI  NO  GA
```

Nous pouvons donc faire toutes les additions, ainsi que toutes les soustractions, en utilisant la technique des “ballons”, et ceci, bien que cela puisse être parfois long et délicat. (voir l’exemple suivant).

Pour soustraire ¶ 33, GA DI GA GA DI, nous ajoutons 33, DI GA DI DI GA.

```
  577  239  99  41  17   7   3   1        577  239  99  41  17   7   3   1

       DI   DI  DI  DI  DI  DI  GA            DI   DI  DI  DI  DI  DI  GA
-               GA  DI  GA  GA  DI       +             DI  GA  DI  DI  GA
----------------------------------       ----------------------------------
```

```
   577 239  99  41  17   7   3   1

        DI  DI  DI  DI  DI  DI  GA
+               DI  GA  DI  DI  GA
   -------------------------------
                    NO      GA  DI
                        DI  NO  GA
        DI  DI      DI  NO  GA
            DI  NO  GA
   -------------------------------
                        DI      NO
        DI      NO  NO  GA  NO  DI
        DI  NO  GA
   -------------------------------
            NO  GA  NO  NO  NO  DI
    DI  NO  GA
   -------------------------------
    DI  NO  GA  GA  NO  NO  NO  DI
```

```
                                                       3
[   405                1 ]        [   239      99  41  17   7 ]
[   ___ _   _____________]        [   _____   ________________]

[    33           17   1 ]        [                41   7   3 ]
[   ___ _   _____________]        [   _____   ________________]

[   438           99  41 ]        [   577                   1 ]
[   ___ _   _____________]        [   _____   ________________]
```