combinatoire autour du problème “007”

par Mlle Hayet Melaz, Mlle Soizic Menguy, M. Patrick Michel, M. Florent Fournot, élèves de 2nde du **lycée Paul Eluard de Saint Denis (93)** et Mlle Céline Kieffer, Mlle Dyhia Guenghar, M. Gabriel Vimeux, élèves de TS du **lycée Jacques Feyder d’Epinay sur Seine (93)**

enseignants : MM. Yves Alvez, Alain Huet, Nolwen Labbé-Poquet
Mme Gwenola Madec, M. Marc Anquetil

chercheur : M. François Parreau, université Paris 13

coordination article : MELAZ Hayet

Compte-rendu de parrainage :

Ils se sont demandé de combien de façons on peut décomposer un nombre ou un chiffre en une somme de trois chiffres ou de trois nombres entiers positifs pris en ordre croissant. Ils ont trouvé une formule générale pour décomposer un nombre, assez compliquée.

Notre groupe a trouvé cet exposé un peu rapide, mais le sujet était intéressant. (De plus, il sont passés lors du déjeuner alors l’attention que nous leur accordions était relachée.) (… plaisanterie !)

Cn — “007” : nombres de somme fixée. **22**

Donnons-nous un nombre entier p. De combien de manières un nombre N (par exemple 007) peut-il s’exprimer comme somme de p nombres plus petits ?

Cette question est typique de la “Combinatoire énumérative” qui cherche des relations systématiques entre les nombres entiers apparaissant naturellement dans les objets structurés finis. Les résultats actuels sont notamment utiles pour évaluer des temps de calcul sur ordinateur, et pour mieux simuler le hasard.

« Combien y a-t-il
de décompositions d’un entier
en somme de trois entiers positifs
rangés dans l’ordre croissant ? »

Par exemple 7 …

0 + 0 + 7	0 + 1 + 6	1 + 1 + 5
	0 + 2 + 5	1 + 2 + 4
	0 + 3 + 4	1 + 3 + 3
		2 + 2 + 3

… se décompose de huit façons en la somme de trois entiers rangés dans l’ordre croissant.

Si on note $R(n)$ le nombre de décompositions de n en somme de trois entiers rangés dans l’ordre croissant alors, par exemple, $R(7) = 8$.

Ces décompositions forment des triplets d’entiers positifs (x, y, z) qui vérifient :

$$x \leq y \leq z \text{ et}$$
$$x + y + z = n.$$

Nous avons classé ces triplets en trois catégories :

• les **triplets** (x, y, z) **de type 1** …

… triplets possédant un 0 en première et deuxième position :

$$x = 0, y = 0 \text{ et } z > 0.$$

• les **triplets** (x, y, z) **de type 2** …

… triplets ne possédant qu’un 0 en première position :

$$x = 0, y > 0 \text{ et } z > 0.$$

• les **triplets** (x, y, z) **de type 3** …

… triplets ne possédant pas de 0 :

$$x > 0, y > 0 \text{ et } z > 0.$$

Entier considéré	Décompositions de type 1	de type 2	de type 3	& nombre total de décompositions
1	0+0+1			1
2	0+0+2	0+1+1		2
3	0+0+3	0+1+2	1+1+1	3
4	0+0+4	0+1+3 0+2+2	1+1+2	4
5	0+0+5	0+1+4 0+2+3	1+1+3 1+2+2	5
6	0+0+6	0+1+5 0+2+4 0+3+3	1+1+4 1+2+3 2+2+2	7
7	0+0+7	0+1+6 0+2+5 0+3+4	1+1+5 1+2+4 1+3+3 2+2+3	8
8	0+0+8	0+1+7 0+2+6 0+3+5 0+4+4	1+1+6 1+2+5 1+3+4 2+2+4 2+3+3	10
9	0+0+9	0+1+8 0+2+7 0+3+6 0+4+5	1+1+7 1+2+6 1+3+5 1+4+4 2+2+5 2+3+4 3+3+3	12
10	0+0+10	0+1+9 0+2+8 0+3+7 0+4+6 0+5+5	1+1+8 1+2+7 1+3+6 1+4+5 2+2+6 2+3+5 2+4+4 3+3+4	14
11	0+0+11	0+1+10 0+2+9 0+3+8 0+4+7 0+5+6	1+1+9 1+2+8 1+3+7 1+4+6 1+5+5 2+2+7 2+3+6 2+4+5 3+3+5 3+4+4	16
12	0+0+12	0+1+11 0+2+10 0+3+9 0+4+8 0+5+7 0+6+6	1+1+10 1+2+9 1+3+8 1+4+7 1+5+6 2+2+8 2+3+7 2+4+6 2+5+5 3+3+6 3+4+5 4+4+4	19
13	0+0+13	0+1+12 0+2+11 0+3+10 0+4+9 0+5+8 0+6+7	1+1+11 1+2+10 1+3+9 1+4+8 1+5+7 1+6+6 2+2+9 2+3+8 2+4+7 2+5+6 3+3+7 3+4+6 3+5+5 4+4+5	21

On peut noter qu'il n'y a qu'une décomposition de type 1 : $0 + 0 + n$.

Le nombre de décompositions de type 2 est le nombre de façons de partager n en deux entiers (l'ordre ne comptant pas). Nous avons observé que **ce nombre de décompositions est égal à la partie entière de la fraction $n/2$** (on la note $E(n/2)$). Démontrons ce résultat :

Soit $(0, y, z)$ une décomposition *de type 2* de n. Alors

$$y + z = n \text{ et } 0 < y \leq z$$

donc

$$y + y \leq z + y$$

d'où

$$2y \leq n \text{ et } y \leq n/2.$$

Or $y > 0$ donc $y \in \{1, 2, \ldots, E(n/2)\}$: il y a exactement $E(n/2)$ possibilités pour y. Comme $z = n - y$ il y a donc exactement $E(n/2)$ possibilités pour le triplet $(0, y, z)$ d'où exactement $E(n/2)$ décompositions du second type de l'entier n.

Le nombre de décompositions **des types 1 et 2**, que nous noterons $A(n)$, est donc :

$$A(n) = E(n/2) + 1.$$

Si n est pair, il s'écrit $n = 2p$ où $p \in$ N.

$$A(n) = p + 1 \text{ donc } A(n) = (n/2) +1.$$

Si n est impair, il s'écrit $n = 2p + 1$ où $p \in$ N.

$$A(n) = p + 1 = (2p + 2)/2$$
$$\text{donc } A(n) = (n+1)/2. \textbf{ [1]}$$

Dans le tableau ci-dessous, nous avons répertorié le nombre de décompositions de chaque type et le nombre total de décompositions.

Entier considéré	nombre de décompositions **de type 1**	**de type 2**	**de type 3**	& nombre total de décompositions $R(n)$
1	1	0	0	1
2	1	1	0	2
3	1	1	1	3
4	1	2	1	4
5	1	2	2	5
6	1	3	3	7
7	1	3	4	8
8	1	4	5	10
9	1	4	7	12
10	1	5	8	14
11	1	5	10	16
12	1	6	12	19
13	1	6	14	21
14	1	7	16	24
15	1	7	19	27
16	1	8	21	30
17	1	8	24	33
18	1	9	27	37
19	1	9	30	40
20	1	10	33	44

Nous avons constaté que **le nombre de décompositions de type 3 de l'entier *n* est égal au nombre total de décompositions de l'entier *n*–3**.

Nous allons donc le démontrer :

Soit (a, b, c) une décomposition **de type 3** de n. Alors $a + b + c = n$ et $1 \leq a \leq b \leq c$. Donc $((a - 1) , (b - 1) , (c - 1))$ vérifie :

$$(a - 1) + (b - 1) + (c - 1) = n - 3$$
$$\text{et } 0 \leq (a - 1) \leq (b - 1) \leq (c - 1)$$

C'est donc une décomposition de $n - 3$.

Réciproquement, si (u, v, w) est une décomposition de $n - 3$. Alors

$$u + v + w = n - 3$$
$$\text{et } 0 \leq u \leq v \leq w$$

donc

$$1 \leq u + 1 \leq v + 1 \leq w + 1$$
$$\text{et } (u + 1) + (v + 1) + (w + 1) = n$$

Donc $((u + 1) , (v + 1) , (w + 1))$ est une décomposition de n.

Toute décomposition de $n - 3$ correspond à une décomposition de type 3 de n et réciproquement. Donc le nombre de décompositions de n de type 3 est $R(n - 3)$. On obtient ainsi une première formule et donc une première méthode de calcul qui est :

$$R(n) = A(n) + R(n - 3)$$
$$R(n) = E(n/2) + 1 + R(n - 3). \textbf{ [2]}$$

Si n est pair $R(n) = n/2 + 1 + R(n - 3)$. Si n est impair $R(n) = (n+1)/2 + R(n - 3)$. Nous obtenons :

$R(1) = 1$

$R(2) = 2$

$R(3) = 3$

$R(4) = 1 + E(4/2) + R(1)$

$R(5) = 1 + E(5/2) + R(2)$

$R(6) = 1 + E(6/2) + R(3)$

$$\begin{aligned} R(7) &= 1 + E(7/2) + R(4) \\ &= 2 + E(7/2) + E(4/2) + R(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(8) &= 1 + E(8/2) + R(5) \\ &= 2 + E(8/2) + E(5/2) + R(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(9) &= 1 + E(9/2) + R(6) \\ &= 2 + E(9/2) + E(6/2) + R(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(10) &= 1 + E(10/2) + R(7) \\ &= 2 + E(10/2) + E(7/2) + R(4) \\ &= 3 + E(10/2) + E(7/2) + E(4/2) + R(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(11) &= 1 + E(11/2) + R(8) \\ &= 2 + E(11/2) + E(8/2) + R(5) \\ &= 3 + E(11/2) + E(8/2) + E(5/2) + R(2) \end{aligned}$$

D'après les exemples précédents nous avons remarqué que, pour $n \geq 4$:

• Si $n–1$ est un multiple de 3, alors $n = 3c + 1$ (avec c entier naturel), et

$$R(n) = (n–1)/3 + [E(n/2)+E((n–3)/2)+\ldots+E(4/2)] + R(1)$$

• Si $n–2$ est un multiple de 3, alors $n = 3c + 2$ (avec c entier naturel), et

$$R(n) = (n–2)/3 + [E(n/2)+E((n–3)/2)+\ldots+E(5/2)] + R(2)$$

• Si n est un multiple de 3, alors $n = 3c + 3$ (avec c entier naturel), et

$$R(n) = (n–3)/3 + [E(n/2)+E((n–3)/2)+\ldots+E(6/2)] + R(1)$$

Démontrons cette dernière formule par récurrence pour $n \geq 4$ (la démonstration est du même type pour les deux autres formules).

• La formule est valable pour $n = 6$.

• Supposons que la formule est valable pour tous les entiers multiples de 3 compris entre 6 et l'entier k multiple de 3 ; montrons qu'alors elle est vraie pour l'entier $k + 3$.

La formule est vraie pour k multiple de 3 :

$$R(k) = (k–3)/3 + [E(k/2)+E((k–3)/2)+\ldots+E(6/2)] + R(3)$$

Or d'après la formule [2] :

$$R(k+3) = E((k+3)/2) + 1 + R(k)$$

D'où

$$R(k+3) = E((k+3)/2) + 1 + (k–3)/3 + [E(k/2)+E((k–3)/2)+\ldots+E(6/2)] + R(3)$$

Comme $1 + (k–3)/3 = k/3$:

$$R(k+3) = k/3 + [E((k+3)/2)+E(k/2)+E((k–3)/2)+\ldots+E(6/2)] + R(3)$$

La formule est donc vraie pour $k + 3$, elle est donc vraie pour tous les multiples de 3.

Rendons explicite la formule **[2]** en effectuant la division euclidienne de n par 6 :

$$\boldsymbol{n = 6 \times p + k}$$

• **Si** $n = 6\times p + k$ **et** $3 \leq k \leq 5$, alors $0\leq k–3\leq 2$.

$$R(n) = E((6p+k)/2) + 1 + R(6p+k–3).$$

$$R(n) = 3p + E(k/2) + 1 + E((6p+k– 3)/ 2) + 1 + R(6p+k– 6)$$

$$R(n) = 3p + E(k/2) + 1 + 3p + E((k–3)/2) + 1 + R(6(p–1) + k)$$

Or k et $(k – 3)$ n'ont pas la même parité donc, d'après **[1]** :

soit $E(k/2) + 1 + E((k – 3)/2) + 1 = k/2 + 1 + ((k–3)+1)/2 = k$;

soit $E(k/2) + 1 + E((k – 3)/2) + 1 = (k+1)/2 + (k–3)/2 + 1 = k$.

Donc $R(n) = 2 \times 3p + k + R(6(p–1) + k)$

$$R(n) = \sum_{q=1}^{q=p}(6q + k) + R(k).$$

Comme $k \leq 5$, $R(k) = k$ et on a

$$\sum_{q=1}^{q=p}(6q + k) = 6\sum_{q=1}^{q=p}q + \sum_{q=1}^{q=p}k$$

et $\displaystyle\sum_{q=1}^{q=p}q = \big(p(p + 1)\big)/2$, donc :

$$\sum_{q=1}^{q=p}(6q + k) = 6\,\big(p(p + 1)\big)/2 + pk$$

D'où $R(n) = 3p(p + 1) + pk + k$. Et donc :

$$\boldsymbol{R(n) = (p + 1)(3p + k)} \quad \textbf{[3]}$$

quand $\boldsymbol{n = 6p + k}$ avec $\boldsymbol{3 \leq k \leq 5}$.

• **Si** $n = 6\times p + k$ **et** $0 \leq k \leq 2$, alors $3 \leq k+3 \leq 5$.

$$R(n) = E((6p+k)/2) + 1 + R(6p+k–3).$$

$$R(n) = 3p + E(k/2) + 1 + R(6(p–1) + k + 3)$$

Or $3 \leq k + 3 \leq 5$. Donc, d'après **[2]**,

$$R(n)=3p+E(k/2)+1+\big((p–1)+1\big)\big(3(p–1)+(k+3)\big)$$

$$R(n) = 3p + E(k/2) + 1 + p(3p + k).$$

$$\boldsymbol{R(n) = E(k/2) + 1 + p(3p + k + 3)} \quad \textbf{[4]}$$

quand $\boldsymbol{n = 6p + k}$ avec $\boldsymbol{0 \leq k \leq 2}$.

$R(n) = p(3p + k + 3) + 1$ si $k = 0$ ou $k = 1$.
$R(n) = p(3p + 5) + 2$ si $k = 2$.

Nous avons donc, d'après les formules **[3]** et **[4]** :

n* = 6*p $R(6p) = 3p^2 + 3p + 1$
donc :

$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (1)}$$

***n* = 6*p* + 1** $R(6p + 1) = 3p^2 + 4p + 1$
donc :

$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (5/12)}$$

***n* = 6*p* + 2** $R(6p + 2) = 3p^2 + 5p + 2$
donc :

$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (8/12)}$$

***n* = 6*p* + 3** $R(6p + 3) = (p + 1)(3p + 3)$
$R(6p + 3) = 3p^2 + 6p + 3$
donc :

$$R(n) = (1/12)(n + 3)^2$$
$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (9/12)}$$

***n* = 6*p* + 4** $R(6p + 4) = (p + 1)(3p + 4)$
$R(6p + 4) = 3p^2 + 7p + 4$
donc :

$$R(n) = (1/12)(n + 2)(n + 4)$$
$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (8/12)}$$

***n* = 6p + 5** $R(6p + 5) = (p + 1)(3p + 5)$
$R(6p + 5) = 3p^2 + 8p + 5$
donc :

$$R(n) = (1/12)(n + 3)^2$$
$$\boldsymbol{R(n) = (1/12)n^2 + (1/2)n + (5/12)}$$

Le nombre $R(n)$ de décompositions d'un entier n positif donné en une somme de trois entiers positifs pris dans l'ordre croissant **croît en 1/12 du carré de *n*** ; il vérifie :

$$1/12n^2 + 1/2n + 5/12 \leq R(n) \leq 1/12n^2 + 1/2n + 1$$

*On peut généraliser cette décomposition à la somme de 4 entiers, 5 entiers, r entiers et **conjecturer** que le nombre $R_r(n)$ de décompositions de n en somme de r entiers positifs rangés dans l'ordre croissant a pour ordre de grandeur n à la puissance r – 1.*