carrés magiques

par Mlle Isabelle Buteau (1°S), Mlle Pulchérie Moussiessi (1°STT), M. Alhamide Haki (2nde), du **lycée George Sand, Le Mée sur Seine (77)**, et Mlle Anne Jamet (2nde), Mlle Maeva Siboukeur (2nde), du **lycée Romain Rolland d'Argenteuil (95)**

enseignants : Mmes Joëlle Rhode, Claudine Bezol, et Mmes Sabine Giros, Dominique Guy

chercheur : M. Loïc Allys, université du Mans

coordination article : Jamet Anne

compte-rendu de parrainage :

Les élèves de 2nde et 1° des lycées George Sand et R. Rolland ont traité un sujet sur les carrés magiques. Ils ont trouvé des méthodes astucieuses afin de les réaliser et nous ont présenté une super Mme Carré Magique sur un transparent.

NC — Carrés magiques. **7**

Lorsqu'on réussit à disposer des nombres sur une figure et que toutes les lignes remarquables de la figure ont la même somme, on a ainsi une combinatoire étonnante, une sorte d'écheveau cabalistique de lignes de points et de nombres, une **figure magique**. Aujourd'hui de telles constructions servent à planifier des expériences aussi bien qu'à réaliser des codes correcteurs d'erreurs bien utiles dans les réseaux de communication.

Le sujet.

Comment construire des carrés magiques de toutes dimensions ?

Résumé des résultats.

Calcul de la valeur commune de la somme des lignes, colonnes et diagonales ;

obtention d'un seul carré d'ordre 3, de plusieurs carrés d'ordre 4, d'ordre 5, avec observations de symétries qui ont permis la construction d'autres carrés ;

méthode utilisée pour obtenir un carré d'ordre impair (5 par exemple) : remplir les cases du carré avec 5 nombres entiers compris entre 0 et 4 de façon que chaque ligne, colonne ou diagonale contienne des nombres différents, puis remplir les cases d'un autre carré avec les multiples de 5 (0, 5, 10, 15, 20) en respectant les mêmes conditions, puis ajouter les cases de même position des deux carrés. Obtention d'un carré d'ordre 7 avec la méthode précédente.

Introduction.

Un carré magique est un tableau carré dont les cases contiennent des nombres entiers distincts tels que les sommes des nombres écrits

- sur chaque ligne,
- sur chaque colonne,
- et sur chacune des deux diagonales

soient égales à un même nombre que l'on note S.

Par exemple dans le cas du carré d'ordre 5, si les nombres que l'on place dans le carré sont les entiers compris entre 1 et 25 on obtient

$$S = 65,$$

et le carré suivant :

5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20
6	15	19	23	2
18	22	1	10	14

Après avoir pris connaissance du sujet, nous avons essayé de trouver des carrés magiques d'ordre 3 et d'ordre 4.

Les carrés devenant de plus en plus grands, nous avons du mal à les construire. Alors nous avons trouvé des formules nous permettant de calculer la somme S des lignes, des colonnes et des diagonales.

Cela nous a permis de construire le carré magique d'ordre 3 et de voir qu'il est unique.

Puis le groupe d'Argenteuil s'est plutôt occupé du cas des carrés de dimension paire, celui du Mée Sur Seine s'est occupé des carrés magiques de dimension impaire.

Formules permettant le calcul de la somme S (somme des lignes, des colonnes, des deux diagonales).

Pour connaître la somme d'une ligne horizontale ou verticale d'un carré magique, on fait la somme de tous les nombres devant entrer dans la composition du carré magique, puis on la divise par le nombre de cases d'une des lignes.

Calcul de la somme des nombres de 1 à n^2 :

Soit n le nombre de cases d'une ligne ou d'une colonne, on considère donc un carré de côté n. n^2 est le nombre total de cases du carré. [Les nombres à placer seront les n^2 premiers entiers : 1, 2, 3, …, n^2.] On l'appellera donc le carré magique de 1 à n^2.

La méthode pour calculer est :

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) + n^2$$
$$\Sigma = n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Ensuite on additionne les deux sommes, ce qui nous donne :

$$2\Sigma = (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + \ldots + (n^2 + 1)$$

Il y a n^2 parenthèses, d'où : $\Sigma = \dfrac{(n^2 + 1)n^2}{2}$

Calcul de la somme d'une ligne ou d'une colonne :

Comme S est la somme d'une des lignes horizontales ou verticales, et comme il y a n cases par ligne ; on a $S = \Sigma / n$. D'après la formule de la somme totale,

$$S = \frac{(n^2 + 1)n^2}{2} \times \frac{1}{n}$$
$$S = \frac{(n^2 + 1)n}{2}$$

Donc, cette formule nous permettra de calculer la somme d'une ligne ou d'une colonne, par exemple pour le carré de 1 à 25, $n = 5$ et on obtient : $S = 65$.

Remarques concernant le calcul de la somme :

Si on change les nombres du carré, au lieu de prendre les nombres entre 1 et n^2, on les prend entre 0 et $n^2 - 1$, alors la somme S est transformée en $S' = S - n$. En effet, pour trouver le carré magique de 0 à $n^2 - 1$, on a soustrait 1 à tous les nombres du carré magique initial, et donc n à chaque ligne et à chaque colonne. Cela nous permettra d'obtenir d'autres carrés magiques, lorsqu'on en aura trouvé un.

Un moyen de réaliser la bonne somme :

Nous avons observé que lorsque l'on place consécutivement les nombres dans un carré,

1	2	3	…	n-2	n-1	n
n+1	n+2	n+3	…	n+(n-2)	n+(n-1)	n+n
2n+1	2n+2	2n+3	…	2n +(n-2)	2n +(n-1)	2n+n
…						
n^2 -(3n-1)	n^2 -(3n-2)	n^2 -(3n-3)…		(n^2-3n) +(n-2)	(n^2-3n) +(n-1)	(n^2-2n)
n^2 -(2n-1)	n^2 -(2n-2)	n^2 -(2n-3)…		(n^2-2n) +(n-2)	(n^2-2n) +(n-1)	(n^2-n)
n^2 -(n-1)	n^2 -(n-2)	n^2 -(n-3)	…	(n^2-n) +(n-2)	(n^2-n) +(n-1)	n^2

nous avons toujours la bonne somme cherchée pour les grandes diagonales.

Calcul pour la première diagonale :

$$\Sigma' = 1 + (n+2) + (2n+3) + \ldots + [(n^2-3n) + (n-2)] + [(n^2-2n) + (n-1)] + n^2$$

$$\Sigma' = n^2 + [(n^2-2n) + (n-1)] + [(n^2-3n) + (n-2)] + \ldots + (2n+3) + (n+2) + 1$$

en additionnant les deux égalités :

$$2\,\Sigma' = (n^2+1) + (n^2+1) + \ldots + (n^2+1) + (n^2+1)$$

$$2\,\Sigma' = n\,(n^2+1)$$

$$\Sigma' = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$$

Calcul pour la seconde diagonale:

$$\Sigma'' = n + [n + (n-1)] + [2n + (n-2)] + \ldots + [n^2 - (3n-3)] + [n^2 - (2n-2)] + [n^2 - (n-1)]$$

$$\Sigma'' = [n^2 - (n-1)] + [n^2 - (2n-2)] + [n^2 - (3n-3)] + \ldots + [2n + (n-2)] + [n + (n-1)] + n$$

$$2\,\Sigma'' = (n^2+1) + (n^2+1) + \ldots + (n^2+1) + (n^2+1)$$

$$\Sigma'' = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$$

Cas particulier du carré d'ordre 3 :

Nous avons commencé tout d'abord par le carré d'ordre 3 dont la somme S est égale à 15. Nous avons écrit toutes les décompositions de 15 en sommes de trois termes entiers compris entre 1 et 9 :

15 = **8** + 1 + 6 ; 15 = 3 + *5* + 7 ; 15 = 4 + 9 + ***2*** ; 15 = **8** + 3 + 4 ; 15 = 1 + *5* + 9 ; 15 = 6 + 7 + ***2*** ; 15 = **8** + *5* + ***2*** ; 15 = 6 + *5* + 4.

5 apparaît dans quatre opérations, il convient de le placer au centre du carré car ainsi il intervient dans la somme des deux diagonales, d'une ligne et d'une colonne.

A partir des autres décompositions de 15, on remarque qu'il convient aussi de placer les termes pairs dans les coins du carré car ils interviennent dans trois opérations et les termes impairs dans les cases restantes de manière à toujours avoir la somme S car ils interviennent seulement dans deux opérations. On obtient ainsi le carré suivant :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Les différents carrés d'ordre 3 issus d'un même carré :

On peut obtenir 7 autres carrés par symétrie par rapport au centre du carré magique, par symétrie par rapport aux diagonales, par symétrie par rapport aux lignes et colonnes centrales et par rotation :

8	**1**	**6**	8	3	4
3	**5**	**7**	1	5	9
4	**9**	**2**	6	7	2
4	3	8	2	7	6
9	5	1	9	5	1
2	7	6	4	3	8
6	7	2	4	9	2
1	5	9	3	5	7
8	3	4	8	1	6
6	1	8	2	9	4
7	5	3	7	5	3
2	9	4	6	1	8

Ces carrés se déduisent les uns des autres par permutation mais en fait il n'existe qu'un seul carré magique d'ordre trois.

Carrés magiques d'ordre pair.

Une méthode pour construire un carré magique pair :

Exemple avec le carré magique de 1 à 36 (carré de 6) :

On calcule d'abord la somme que l'on doit trouver sur chaque ligne, colonne et diagonale. Pour cela on applique la formule correspondante :

$n = 6 \ldots$

$$S = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = \frac{6 \times \left(6^2+1\right)}{2} = \frac{6 \times 37}{2} = 3 \times 37 = 111$$

On sait donc que l'on doit trouver comme somme magique 111.

Ensuite on dispose tous les nombres de 1 à 36 dans le carré magique de cette façon (il faut que tous les nombres se suivent dans leur ordre croissant) :

I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	21	+ 90
II	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	57	+ 54
III	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	93	+ 18
IV	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	129	– 18
V	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	165	– 54
VI	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	201	– 90

On remarque que les diagonales sont égales à 111. Ensuite on calcule la somme que l'on a sur chaque ligne. On remarque que sur les deux diagonales, on obtient directement la somme magique. On ne va plus toucher aux diagonales.

On remarque aussi que pour la ligne I, il manque 90 pour obtenir la somme magique, tandis que la ligne VI, il faudra enlever 90. On remarque la même chose pour les lignes II et V et les lignes III et IV. Les lignes se complètent ainsi par symétrie par rapport à l'axe médian, on obtient alors ceci :

	I	II	III	IV	V	VI	=111
I	1	**32**	**3**	**34**	**35**	6	=111
II	**7**	8	**27**	**28**	11	**30**	=111
III	**19**	**20**	15	16	**17**	**24**	=111
IV	**13**	**14**	21	22	**23**	**18**	=111
V	**25**	26	**9**	**10**	29	**12**	=111
VI	31	**2**	**33**	**4**	**5**	36	=111
	=96	=102	=108	=114	=120	=126	=111
	+15	+9	+3	+3	+9	+15	

Comme précédemment, on calcule la somme que l'on a sur chaque colonne. On remarque aussi que pour la colonne I il manque 15 pour obtenir la somme magique tandis que sur la colonne VI il faudra enlever 15. On remarque la même chose pour les colonne II et V, et pour les colonnes III et IV.

On obtient alors un carré magique qui fonctionne parfaitement sur les lignes, sur les colonnes et sur les diagonales.

1	32	34	3	35	6
30	8	28	27	11	7
19	17	15	16	20	24
18	23	21	22	14	13
12	26	9	10	29	25
31	5	4	33	2	36

On remarque que cette méthode marche pour tous les carrés magiques d'ordre pair.

Carrés magiques d'ordre impair lorsque l'ordre est supérieur à 4.

Méthode en utilisant des symétries pour le carré d' ordre 5 :

Lors de la recherche du carré d'ordre 3, nous avons remarqué que la décomposition de la somme *S* en somme de trois entiers nous permettait de construire le carré d'ordre 3. Nous voulons construire un carré d'ordre 5 en utilisant une méthode analogue.

Sachant que pour les carrés d'ordre 5 contenant des nombres compris entre 1 et 25, la valeur de la somme est 65. On décompose 65 en une somme de 3 termes dont l'un sera le nombre du centre du carré, les deux autres termes étant égaux (ex : 32 + 1 + 32). Ensuite, on cherche tous les couples de nombres [différents] dont la somme est 32 et que l'on place de façon symétrique par rapport au centre du carré.

65 = 32 + *1* + ***32***

9	21	***13***	5	**17**
3	***20***	**7**	***24***	11
22	**14**	*1*	**18**	***10***
14	***8***	**25**	***12***	4
15	2	***19***	6	**23**

65 = **26** + *13* + ***26***

23	6	***12***	15	**9**
18	***10***	**25**	***4***	8
2	**7**	*13*	**19**	***24***
5	***22***	**1**	***16***	21
17	20	***14***	11	**3**

65 = **20** + *25* + ***20***

3	20	***7***	24	**11**
22	***14***	**1**	***18***	10
16	**8**	*25*	**12**	***4***
15	***2***	**19**	***6***	23
9	21	***13***	5	**17**

[NDLC : les différents types de caractères devraient permettre au lecteur attentif de retrouver les sommes annoncées, symétriques par rapport à *1*, *13*, ou *25*.]

Méthode en décomposant le carré :

Par exemple pour le carré d'ordre 5. Sur la première ligne, on écrit les nombres compris entre 0 et 4 dans un ordre quelconque par exemple 4, 3, 2, 1, 0, puis on complète les autres lignes ; pour chaque ligne, on décale ces nombres de 2 cases, on obtient un **premier carré** :

4	3	2	1	0
1	0	**4**	3	2
3	2	1	0	**4**
0	**4**	3	2	1
2	1	0	**4**	3

On multiplie ce carré par 5, on obtient un **deuxième carré** avec les multiples de 5.

+20	+15	+10	+5	+0
+5	+0	+20	+15	+10
+15	+10	+5	+0	+20
+0	+20	+15	+10	+5
+10	+5	+0	+20	+15

Ce deuxième carré nous permet d'obtenir un **troisième carré** par symétrie par rapport à la colonne centrale.

+0	+5	+10	+15	+20
+10	+15	+20	+0	+5
+20	+0	+5	+10	+15
+5	+10	+15	+20	+0
+15	+20	+0	+5	+10

Par addition du premier et du troisième carré, on obtient un carré magique d'ordre 5.

4	8	12	16	20
11	15	24	3	7
23	2	6	10	19
5	14	18	22	1
17	21	0	9	13

Il ne reste qu'à ajouter 1 dans chaque case pour obtenir un carré magique d'ordre 5, rempli avec les nombres de 1 à 25.

5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20
6	15	19	23	2
18	22	1	10	14

Nous remarquons que cette méthode marche avec tous les carrés magiques impairs …

… voici le carré magique de 7, rempli avec les nombres de 0 à 48.

$S' = S - n = 175 - 7 = 168$

+0 **6**	+7 **5**	+14 **4**	+21 **3**	+28 **2**	+35 **1**	+42 **0**
+14 **1**	+21 **0**	+28 **6**	+35 **5**	+42 **4**	+0 **3**	+7 **2**
+28 **3**	+35 **2**	+42 **1**	+0 **0**	+7 **6**	+14 **5**	+21 **4**
+42 **5**	+0 **4**	+7 **3**	+14 **2**	+21 **1**	+28 **0**	+35 **6**
+7 **0**	+14 **6**	+21 **5**	+28 **4**	+35 **3**	+42 **2**	+0 **1**
+21 **2**	+28 **1**	+35 **0**	+42 **6**	+0 **5**	+7 **4**	+14 **3**
+35 **4**	+42 **3**	+0 **2**	+7 **1**	+14 **0**	+21 **6**	+28 **5**

6	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**
15	**21**	**34**	**40**	**46**	**3**	**9**
31	**37**	**43**	**0**	**13**	**19**	**25**
47	**4**	**10**	**16**	**22**	**28**	**41**
7	**20**	**26**	**32**	**38**	**44**	**1**
23	**29**	**35**	**48**	**5**	**11**	**17**
39	**45**	**2**	**8**	**14**	**27**	**33**