les mathématiques au CNRS, évolutions et nouvelles réalités

Conférence de ***Jean-Michel Lemaire*** (Laboratoire Jean Dieudonné, Nice ; directeur adjoint au département des Sciences Physiques et Mathématiques du CNRS).

Introduction de la conférence, par Pierre Duchet :

Jean-Michel Lemaire travaille à Nice, dans le laboratoire Jean Dieudonné, un nom que la communauté mathématique connaît bien, et il exerce aussi des fonctions administratives importantes puisqu'il est Directeur-adjoint du **département des sciences physiques et mathématiques** du CNRS qui apporte son soutien à notre congrès, avec l'aide aussi de la **mission à l'information scientifique et technique**. Donc il est l'un des contributeurs à la réussite de ce congrès. Je lui laisse la parole.

[*applaudissements*.]

Jean-Michel Lemaire :

Merci. [*applaudissements*.] Tout d'abord, bonjour, désolé de n'avoir pas pu venir comme je le souhaitais avant ce matin. J'ai écouté vos exposés ce matin et je dois dire que j'ai été très impressionné par la qualité des laïus que vous avez faits et la passion qui vous anime ; je le suis d'autant plus que votre passion n'est pas retombée après trois jours dans cet amphi qui est, disons, confortable, mais … il y fait un petit peu chaud, n'est-ce pas ?

Pierre Duchet, votre gentil animateur, m'a demandé de vous parler des mathématiques au CNRS. Rassurez-vous je ne vais pas vous embêter trop longtemps avec des chiffres, je vous raconterai aussi un peu de mathématiques, pour vous introduire un film, qui parle *un peu* de mathématiques, et *beaucoup* de physique et de matériaux du futur. Alors si vous voulez un titre, ce pourrait être

« ***des solides de Platon***

aux

matériaux de l'an 2000 »

Alors, les mathématiques au CNRS. Le CNRS, on vous en a sans doute déjà un peu parlé ? Vous savez ce que ça veut dire CNRS ?

[*Rires. C'est projeté en permanence sur l'écran pendant les pauses* :]

CNRS
CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Bien, qui sait depuis combien de temps ça existe ?

Dans la salle :

Depuis 30 ans.

Jean-Michel Lemaire :

Plus que cela, on a fêté, il n'y a pas longtemps, le cinquantenaire.

Dans la salle :

En 1945.

Jean-Michel Lemaire :

Presque. En fait, il existait quelque chose avant, qui avait presque les mêmes initiales, mais qui s'appelait le Conseil Supérieur de la Recherche Scientifique et qui a été créé en 1933. Et, ce qui est intéressant, à l'initiative d'un grand mathématicien, qui s'appelait Emile Borel. Je ne sais pas si vous avez entendu parler d'Emile Borel ? Un petit peu ? Pas du tout. Il est assez connu pour des travaux sur les probabilités, sur la topologie. Ceux d'entre vous qui iront en maths sup, ou à l'université faire des maths, … j'espère presque tous, n'est-ce pas … on vous parlera du théorème de Borel-Lebesgue, par exemple.

Emile Borel, donc, a fait créer cette Caisse Supérieure, qui est devenue Conseil Supérieur de la Recherche Scientifique. Le CNRS, lui, il a été officiellement créé en 1939, seulement il s'est passé des choses juste après, comme vous savez, et ce n'est qu'en 1945 que le CNRS a vraiment démarré. Dès le début, il a couvert l'ensemble des disciplines scientifiques, les maths, la physique, la chimie, etc … mais aussi les sciences humaines, l'histoire, l'archéologie, tout ça. Et dans la liste des disciplines la section numéro 1, c'était les mathématiques. Et c'est toujours ainsi aujourd'hui ! Cela, vous savez peut-être, c'est une vieille tradition française, qui remonte à un certain Auguste Comte, dit-on, on commence toujours pas mettre les maths en premier, éventuellement pour en dire du mal après d'ailleurs, comme certains grands scientifiques l'ont fait récemment, paraît-il. En fait, le CNRS c'était essentiellement pour les physiciens, pour construire des grands laboratoires de physique où on faisait des expériences qui coûtaient très cher, et surtout pour faire la science que les universités ne faisaient pas ou pas bien, et donc les mathématiques étaient un peu spéciales là-dedans, ne serait-ce que parce ce qu'à l'époque on disait — et c'était presque vrai, ce l'est moins maintenant avec les ordinateurs — que pour faire des maths il suffisait de papier et d'un crayon.

Surtout, à cette époque, il y avait très peu de mathématiciens au CNRS et ils n'y restaient pas longtemps. On y restait cinq, six, sept ans, huit ans, le temps de faire une thèse, c'est-à-dire d'écrire des mathématiques réputées nouvelles et difficiles. Et puis, on partait prendre un poste d'enseignant dans une université. Le plus souvent d'ailleurs, on partait dans une université de province. C'est ce que j'ai fait moi-même, je suis rentré au CNRS juste après l'Ecole Normale, en 1968, et j'en suis parti en 1973 pour aller à Nice.

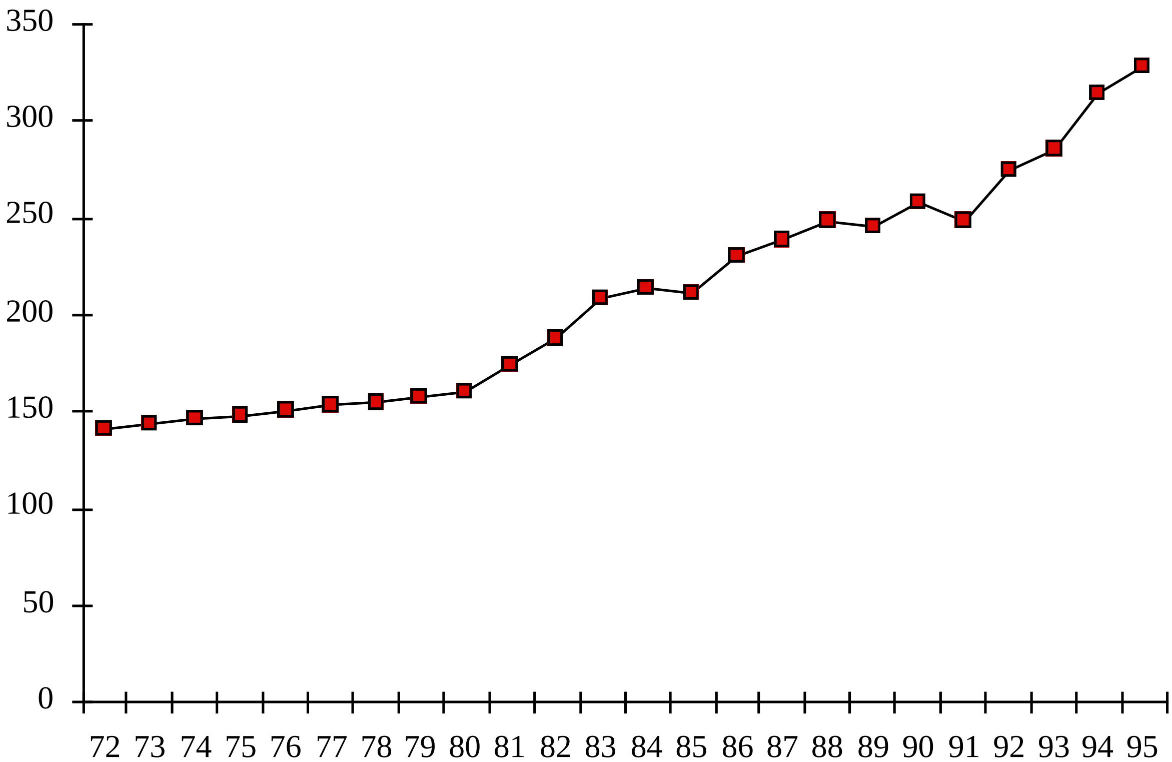
Les choses ont commencé à changer à peu près à cette époque d'ailleurs. En 1973, il y avait 144 mathématiciens chercheurs au CNRS. Maintenant il y en a environ 330. Sur ces 144 personnes, il y avait 8 directeurs de recherches seulement, contre une centaine aujourd'hui. Et à l'époque, l'âge *moyen* de ces chercheurs était de vingt-neuf ans et six mois, je dis bien l'âge *moyen*. En comparaison, vingt-neuf ans et six mois, c'est l'âge moyen auquel les mathématiciens *entrent* aujourd'hui au CNRS.

Dans la salle :

et six mois ?

Jean-Michel Lemaire :

Bien sûr, c'est une moyenne. Cela veut dire qu'aujourd'hui les mathématiciens qui rentrent au CNRS ont entre vingt-huit et trente ans, et que plus de la moitié de ceux qui y sont entrés il y a vingt, vint-cinq ans y sont encore aujourd'hui. Voici un graphique qui illustre l'évolution des effectifs de mathématiciens au CNRS :



Nombre de mathématiciens au CNRS, de 1972 à 1995.

On voit clairement sur ce graphique qu'un changement s'est produit à la fin des années 70 : jusque-là, l'effectif est resté presque stable, comme je l'ai dit on entrait très jeune au CNRS pour faire sa thèse et on s'en allait. A partir de 77-79, l'effectif a connu une progression beaucoup plus rapide, de l'ordre de 4 à 5% par an. Je vais essayer de vous expliquer rapidement pourquoi.

Revenons à la période 1945-1965 ; pour résumer un peu sommairement, la science lourde se faisait dans quelques gros laboratoires propres du CNRS, et puis il y avait quelques jeunes hurluberlus qui étaient mathématiciens au CNRS pour préparer leur thèse, mais qui ne savaient pas ce qu'était un laboratoire !

Autour de 66, 67, les universités ont connu une véritable explosion démographique. A cette époque on a construit des quantités d'universités, un peu trop vite d'ailleurs, parce que maintenant il faut réparer les bâtiments, et quand on y a mis de l'amiante comme à Jussieu ça risque de coûter très, très cher …

Beaucoup d'universités de province se sont développées et ont recruté beaucoup de monde. Pour aider ces universités à faire de la bonne recherche, le CNRS a fait ce qu'on a commencé à appeler à l'époque des laboratoires associés.

Le Directeur Général de l'époque s'appelait Monsieur Jacquinot. En sortant vous regarderez, il y a ce qu'on appelle la galerie des dinosaures — euh pardon, des Directeurs Généraux du CNRS [*rires*] — non, ne riez pas ce sont des gens très bien — eh bien, vous regarderez, il y a le portrait de Monsieur Jacquinot.

Le CNRS avait vingt ans, s'était beaucoup développé lui aussi et il avait besoin de renforcer ses structures. C'est Monsieur Jacquinot qui l'a fait, et il s'est entouré de Directeurs Scientifiques pour l'aider. Et le premier Directeur Scientifique pour les Sciences de la Matière, qui contenaient aussi les mathématiques mais qui étaient surtout la physique, c'était Monsieur Hubert Curien, qui a été Ministre de la Recherche, et qui, sauf erreur, a été un peu à l'origine du mouvement MATh. en. JEANS, puisque c'est lui qui a créé l'opération 1000 chercheurs et … dans … 1000 classes, c'est ça ? 1000 chercheurs - 1000 classes ?

Pierre Duchet :

1000 classes - 1000 chercheurs. Vous avez un petit historique sur le stand MATh.en.JEANS, et le nom de Monsieur Curien y figure effectivement.

Jean-Michel Lemaire :

Voilà. Donc à cette époque, sous l'impulsion du CNRS, on a commencé à créer des *laboratoires* de mathématiques. Et ça c'est un des points que je voudrais que vous reteniez, c'est que, disons jusqu'à une époque relativement récente, les gens faisaient des mathématiques dans leur coin. Certes, de temps en temps, ils organisaient des colloques pour se les raconter, mais la création mathématique était une activité fondamentalement solitaire.

Justement ce qui est excellent dans MATh.en. JEANS, c'est que vous faites des maths ensemble, vous cherchez des problèmes ensemble. Les maths maintenant ça se fait à plusieurs et donc pour faire des maths ensemble, il faut s'en donner les moyens : les laboratoires de mathématiques sont devenus maintenant une réalité — grâce essentiellement au CNRS — et on peut dire que ça a commencé vers 1966.

Curieusement, le premier laboratoire associé du CNRS — toutes disciplines confondues — c'est-à-dire un laboratoire universitaire, auquel le CNRS donne de l'argent et dans lequel il installe des chercheurs, c'est l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg. Comme c'est le laboratoire numéro 1 par ordre chronologique, son nom de code est URA 1.

Une fois de plus, les maths ont beau ne pas être bien grosses au CNRS, on les met toujours en tête !

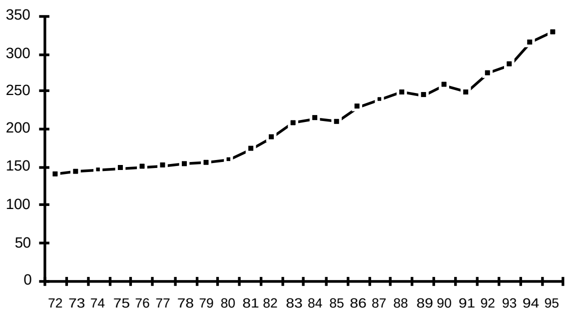
Cela illustre en tous cas l'importance que le CNRS, très tôt, a accordé à la province. C'est une des priorités du CNRS, de faire en sorte qu'il y ait des bons chercheurs — en particulier des mathématiciens répartis dans toutes les grandes villes de France.

Revenons à notre graphique.

Une petite parenthèse, avant 72, je n'ai pas trouvé de chiffres précis ; grâce à vous, en préparant cet exposé, je me suis aperçu que d'abord on avait très peu de données disponibles sur l'histoire des maths au CNRS, bien que ce ne soit pas de l'histoire très ancienne. Je suis en train d'essayer de combler cette lacune, avec l'aide d'un historien des sciences !

Comme je vous l'ai dit, les universités ont énormément embauché dans la période 66-73, mais ensuite presque tous les postes étaient pourvus et il y a eu très peu de recrutement — notamment en mathématiques — dans la décennie 75-85.

Heureusement, le CNRS a maintenu son rythme d'embauche, et comme il n'y avait plus de postes en faculté, c'est ce qui explique la rupture de pente que vous voyez.



Plus récemment, vers 1990, les universités ont a nouveau obtenu des postes de mathématiques en assez grand nombre, et ont embauché des chercheurs CNRS, on le voit ici.

Quelle conclusion peut-on en tirer ? C'est que le CNRS a fait de gros efforts pour conserver un nombre important de chercheurs en mathématiques, et je crois que ça a été essentiel dans cette période 75-85 où il y avait peu de recrutement à l'Université. Beaucoup des meilleurs mathématiciens français actuels sont passés par le CNRS, certains y sont restés, mais si l'école mathématique française a pu se maintenir au tout premier plan mondial, le premier même si on rapporte son activité à la population, le CNRS y est pour beaucoup.

Maintenant on est arrivés à 320, 330 chercheurs. Alors là, on peut se poser un certain nombre de questions : est-ce qu'il faut continuer la courbe ? est-ce qu'on pourra ? Vous avez peut-être entendu dire que le CNRS a quelques difficultés financières, je n'insisterai pas là-dessus parce que ce n'est pas drôle, mais on peut évidemment se demander ce que deviendra cette courbe dans les dix prochaines années. J'espère qu'elle restera quand même à un niveau raisonnable. Je pense qu'il faut conserver la particularité des mathématiciens que la plupart d'entre eux ne font pas carrière au CNRS, mais l'idéal est de pouvoir y faire sa thèse parce qu'on n'a que ça à faire, on est payé raisonnablement, et on a une très grande liberté, on peut aller à tous les congrès qu'on veut sans être obligé de remplacer ses cours, donc c'est le paradis pour un mathématicien, mais un paradis où il faut travailler dur quand même !

Mais on a besoin de mathématiciens pour enseigner, et la plupart des mathématiciens aiment enseigner, et donc l'idéal serait qu'ils puissent circuler le plus librement possible entre l'université et la recherche à temps plein au CNRS.

Enfin un autre domaine où le CNRS a fait et fait encore un gros effort, c'est celui des applications des mathématiques. Si en France on a beaucoup d'excellents mathématiciens, il n'y en avait pas assez — et il n'y en a toujours pas assez d'ailleurs — qui s'intéressent aux applications. On peut dire que l'un des thèmes majeurs de l'action du CNRS en mathématiques, c'est ce que nous appelons *l'ouverture des mathématiques*. Cela veut dire que le CNRS, sans négliger la recherche pour elle-même, incite les mathématiciens — et particulièrement ses chercheurs, à être aussi ouverts que possible aux problèmes posés par les autres disciplines, l'industrie, en un mot aux applications des maths.

Je ne vais pas vous en dire beaucoup plus sur les maths au CNRS parce que je vous ai promis de ne pas vous ennuyer longtemps, mais à titre d'illustration de l'ouverture des mathématiques, je vais vous montrer un thème qui a connu des ouvertures tout à fait étonnantes depuis dix ans, et que pourtant on peut faire remonter à une époque très ancienne, puisque voici un texte de quelqu'un qui vivait il y a 2400 ans, et qui s'appelle :

Platon !

« Si l'on réunit quatre triangles équilatéraux, avec chaque groupe de trois angles plans on forme un angle solide, qui fait immédiatement suite à l'angle plan le plus obtus ; avec quatre de ces angles ainsi formés se trouve constituée la première forme solide (...). La deuxième est constituée (...) de huit triangles équilatéraux pour former avec quatre angles plans un angle solide ; il se forme six de ces angles, et le deuxième corps arrive ainsi à son accomplissement. Le troisième (...) est formé de douze angles solides, délimités chacun par cinq plans qui sont des triangles équilatéraux, et il a vingt bases qui sont des triangles équilatéraux.

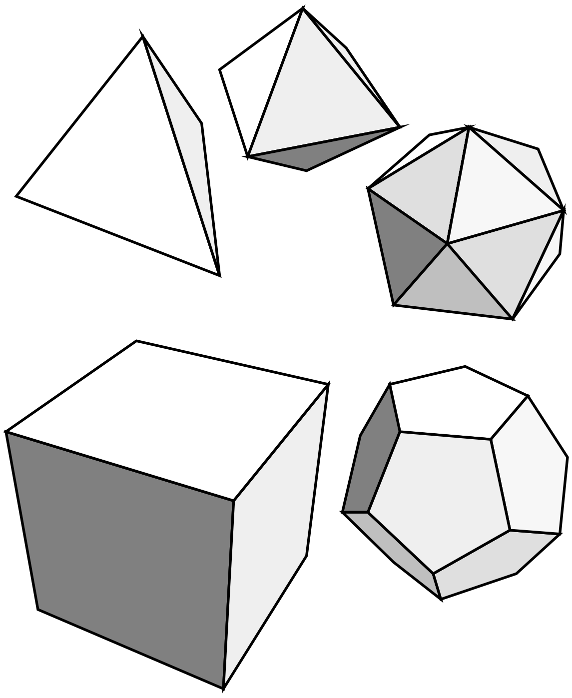
« Et le premier élément fut quitte de sa tâche après avoir engendré ces corps. Ce fut au triangle isocèle d'engendrer la nature du quatrième : de tels triangles, en se réunissant par quatre (...), réalisèrent un quadrilatère équilatéral ; six figures de cette sorte par leur assemblage aboutissent à former huit angles solides, composés chacun de trois angles plans qui sont droits ; la figure du corps ainsi formé fut le cube, qui a pour base six surfaces quadrangulaires équilatérales.

« Il restait encore une combinaison, la cinquième ; c'est à l'univers que le Dieu en fit application, pour en dessiner l'épure. »

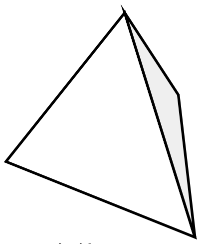
[Extrait du *Timee*, de Platon.]

Voilà. Alors qu'est-ce qu'il raconte Platon ? Eh bien, Platon, il était passionné par des objets qu'on appelle maintenant les solides de Platon, ou encore les polyèdres réguliers.

Les voici : vous voyez, il y en a cinq.



Et Platon raconte comment on les construit. Vous voyez, il dit : on prend des triangles équilatéraux … ils sont un peu petits, je ne sais pas si tout le monde les voit bien … un triangle équilatéral vous savez ce que c'est … Si on en prend quatre, avec chacun de trois on forme un angle comme ça, vous voyez, c'est ça qu'il dit, on fait un angle solide, le voici, qui fait « immédiatement suite à l'angle plan le plus obtus ». Ça veut dire que quand on les met comme ça, ça fait un angle plat, vous voyez 60 + 60 + 60 ça fait 180. Donc on les referme comme ça et ça fait un angle solide. Et puis quand on réunit les quatre faces on obtient ceci qui s'appelle … ?

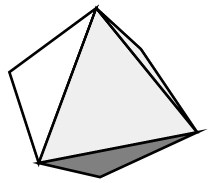


Tétraèdre.

La pyramide régulière ou le tétraèdre régulier, d'accord ? Bon. Si au lieu d'en prendre trois, on en prend quatre, et si on les referme, c'est ce qu'il dit, et qu'on en prend deux comme ça, on obtient cette figure … qui s'appelle ?

Dans la salle :

Un octaèdre.

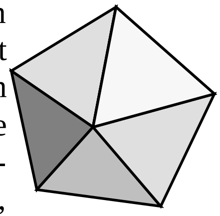


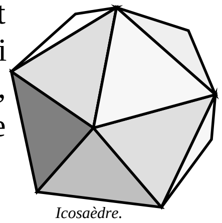
Octaèdre.

Jean-Michel Lemaire :

Un octaèdre ! Octa ça veut dire huit. Un octaèdre régulier.

Et ensuite il dit , on en a pris quatre, on peut en prendre … cinq ! Vous voyez le troisième est formé de douze angles solides délimités chacun par cinq plans qui sont des triangles équilatéraux, je ne sais pas si j'ai encore un triangle équilatéral, je vais en faucher un au tétraèdre. Vous voyez on en prend cinq comme ça … et puis … si on les referme on obtient … un angle solide comme ça, et puis en continuant, en prenant vingt, vingt triangles, on obtient cette très jolie figure qui s'appelle un icosaèdre, ikossi en Grec, ça veut dire vingt.

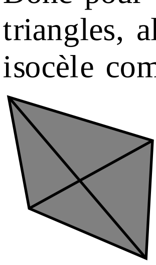




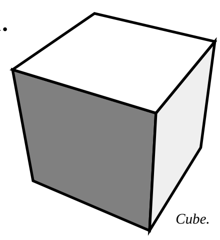
Icosaèdre.

Et puis après il dit quelque chose d'un peu étrange … voici la suite du texte, vous voyez, c'est dans le Timee, il raconte ça un petit peu comme la création du monde, et il dit, eh bien le triangle équilatéral il a fini de faire ce qu'il pouvait faire parce que si vous en mettez un sixième, six fois soixante, ça fait 360, c'est plat, ce qu'on obtient en fait c'est un pavage du plan, ça ne se referme plus.

Donc pour continuer il faut prendre d'autres triangles, alors il prend le triangle rectangle isocèle comme celui-ci, il en met quatre, ça fait des carrés, et puis en prenant six carrés, on obtient le cube.



Voilà.



Cube.

Et puis il écrit :

> « il restait encore une combinaison, la cinquième, c'est à l'univers que le dieu en fit application pour en dessiner l'épure »

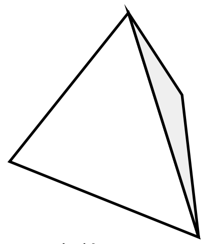
une phrase un peu mystérieuse qui veut sans doute dire qu'il savait ce que c'était — un dodécaèdre, dodéka ça veut dire douze — mais il se demandait à quoi ça pouvait bien servir.

Vous voyez que la manière dont Platon raconte les choses est intéressante, parce que on part de la géométrie plane et on va vers l'espace en collant ensemble des morceaux de plan. Visiblement, Platon n'est pas encore familier de la géométrie dans l'espace. Il fait de la géométrie dans l'espace à partir de la géométrie plane.

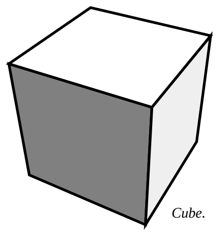
A ce propos, il y a une phrase très amusante dans *la République*, un autre livre de Platon, où il dit qu'il faudrait vraiment étudier la géométrie dans l'espace mais que ça n'intéresse personne, et qu'il faut que la République lance un programme de recherche, quelque chose comme un CNRS pour s'occuper de la géométrie dans l'espace.

Alors, vous voyez, ce qui est intéressant maintenant dans ces objets, c'est que donc ce sont les cinq polyèdres convexes, vous savez ce que ça veut dire, j'ai entendu ces mots dans un exposé tout-à-l'heure, les cinq polyèdres convexes qui ont le plus de symétries. C'est cela le point de vue moderne — enfin qui date du siècle dernier ! — c'est de regarder les rotations qui laissent ces objets invariants. Alors, on va regarder déjà celui-ci. Vous voyez que quand vous le faites tourner d'un tiers de tour, vous retrouvez … il se superpose à lui-même. Ou bien, si vous le prenez comme ça et que vous le faites tourner d'un demi-tour, il se superpose sur lui-même. Donc on va étudier l'ensemble de toutes ces rotations qui conservent et cet ensemble est tout à fait remarquable, et c'est ce qu'on appelle un groupe.

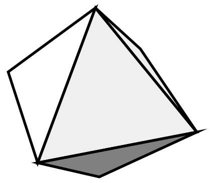
Platon classait les polyèdres d'après la forme de leurs faces. Mais en réalité, il ne faut pas les classer comme ça, si on regarde leurs symétries, il faut les classer comme ça :



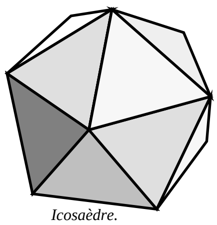
Tétraèdre.



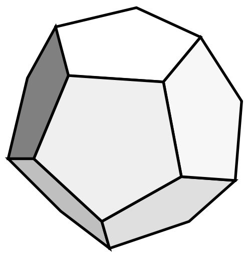
Cube.



Octaèdre.



Icosaèdre.



Dodécaèdre.

C'est-à-dire, le tétraèdre est tout seul. Le cube et l'octaèdre sont ensemble car ils ont exactement les mêmes symétries. Et pour une raison bien simple, c'est que si vous prenez un cube et que vous marquez un point sur chaque face, vous obtenez un octaèdre. Et réciproquement, si vous prenez un octaèdre et que vous marquez un point, le centre de gravité, disons, pour que ça soit régulier, sur chaque face, vous obtenez un cube. Donc en fait, ces deux vont ensemble, ils ont les mêmes symétries et en fait on peut dire ils sont, ils se correspondent par une transformation qu'on appelle une dualité, c'est-à-dire qu'à un sommet de l'un correspond une face de l'autre et réciproquement.

Enfin l'icosaèdre et le dodécaèdre sont aussi duaux l'un de l'autre.

Alors, les groupes, c’est quelque chose de tout à fait essentiel en mathématiques : je vous ai dessiné ici la table de composition, la table de multiplication, du groupe du tétraèdre.

	I	**X**	**Y**	**Z**	**A**	**B'**	**C**	**D'**	**A'**	**B**	**C'**	**D**
I	I	X	Y	Z	A	B'	C	D'	A'	B	C'	D
X	X	I	Z	Y	C	D'	A	B'	D	C'	B	A'
Y	Y	Z	I	X	D'	C	B'	A	B	A'	D	C'
Z	Z	Y	X	I	B'	A	D'	C	C'	D	A'	B
A	A	D'	B'	C	A'	D	B	C'	I	Z	X	Y
B'	B'	C	A	D'	C'	B	D	A'	Z	I	Y	X
C	C	B'	D'	A	D	A'	C'	B	X	Y	I	Z
D'	D'	A	C	B'	B	C'	A'	D	Y	X	Z	I
A'	A'	C'	D	B	I	Y	Z	X	A	C	D'	B'
B	B	D	C'	A'	Y	I	X	Z	D'	B'	A	C
C'	C'	A'	B	D	Z	X	I	Y	B'	D'	C	A
D	D	B	A'	C'	X	Z	Y	I	C	A	B'	D'

Les notations sont les suivantes : les X, Y et Z ce sont les demi-tours d’axe perpendiculaire à deux arêtes opposées. Et puis A, B, C, D, A', B', C', D' ce sont des tiers de tour, des rotations de 120° autour d’un axe qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire à la face opposée. Enfin I c’est ne rien faire du tout, c’est l’élément neutre.

Alors vous avez un groupe qui a … combien d’éléments ?

Douze ! Et alors vous remarquez que j’ai colorié [NDLC : non, non, on ne se paye pas l’impression en quadrichromie … dommage, mais il y a bien trois gris différents ; le lecteur doit pouvoir traduire : blanc = blanc, jaune = gris pâle, bleu = gris foncé.] les éléments de trois couleurs différentes, blanc, jaune, bleu. Pourquoi ? Parce que ce groupe a une propriété, c’est qu’on peut colorier les éléments du groupe de telle sorte que, quand vous regardez la table de loin comme ça, vous voyez une autre table de groupe. C’est le groupe à trois éléments : vous voyez, un élément qui s’appelle blanc, un élément qui s’appelle jaune et un élément qui s’appelle bleu. Vous voyez cette table, là ? Vous avez regardé les entiers modulo trois, je crois ?

L’idée que je voudrais faire passer, un peu rapidement, et c’est peut-être un peu ambitieux, c’est qu’en fait, la plupart des groupes ont la propriété qu’on peut les colorier comme ça de façon à trouver un autre groupe, qu’on appelle un *groupe-quotient*.

Mais il y a des groupes qu’on ne peut colorier qu’avec une seule couleur. On les appelle les groupes *simples*. Il y en a qui sont faciles à trouver, c’est les entiers modulo p, p premier. Le plus petit qui n’est pas de ce type, c’est le groupe des rotations du dodécaèdre (ou de l’icosaèdre, on l’a dit c’est le même), on trouve qu’il a soixante éléments : I, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R'_1, R'_2, R'_3, R'_4, R'_5, R'_6, R'_7, R'_8, R'_9, R'_{10}, A, B, C, D, E, F, A', B', C', D', E', F', A'', B'', C'', D'', E'', F'', A''', B''', C'', D''', E''', F'''.

Je vous ai écrit la liste de ces éléments. Bon d’abord, il y a l’identité. Il y a des demi-tours autour de la médiatrice commune à deux arêtes parallèles.

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}

Il y a des rotations d’un tiers de tour autour de la droite qui joint deux sommets opposés.

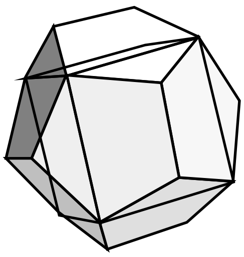
R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R'_1, R'_2, R'_3, R'_4, R'_5, R'_6, R'_7, R'_8, R'_9, R'_{10}.

Et puis il y a des rotations d’un cinquième de tour parce que vous avez des faces pentagonales.

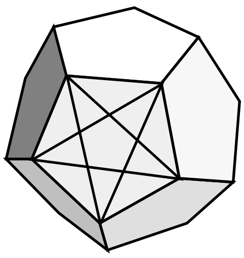
A, B, C, D, E, F, A', B', C', D', E', F', A'', B'', C'', D'', E'', F'', A''', B''', C'', D''', E''', F'''.

Alors si vous vous amusez à compter, vous allez trouver donc, 15, 20 et 24, ça fait 59, et puis l'identité, ça fait 60. Alors, ça c'est un groupe très important parce qu'il est simple. Et il a d'autres interprétations, c'est le groupe des permutations paires de cinq objets, que l'on note A_5.

Pourquoi cinq objets ? une façon d'expliquer pourquoi il permute cinq objets, je ne sais pas si vous allez voir, c'est qu'à l'intérieur de mon dodécaèdre, là, j'ai installé un cube. Vous voyez qu'il y a un cube ? Les arêtes de ce cube, si vous regardez comme ça, ce sont des diagonales du pentagone. A l'intérieur du pentagone convexe, vous pouvez dessiner l'étoile à cinq branches. Donc c'est un côté de l'étoile à cinq branches.



Ainsi, dans un dodécaèdre régulier, vous pouvez mettre un cube comme celui-là, mais en fait vous pouvez en mettre cinq, exactement autant qu'il y a de côtés à l'étoile à cinq branches.



Et alors ce n'est pas difficile de voir que si vous avez une rotation qui amène le dodécaèdre sur lui-même, cette rotation va amener l'un des cubes à l'intérieur sur un autre cube. Et vous avez cinq cubes. Il reste à vérifier qu'il y a une permutation sur deux qui est réalisée, c'est-à-dire celles qui sont paires. Voilà pourquoi on trouve le groupe A_5.

Bien. Je ne sais pas combien de temps j'ai encore pour parler …

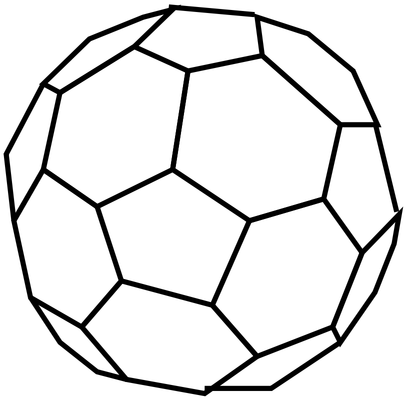
Pierre Duchet :

Si tu veux passer le film …

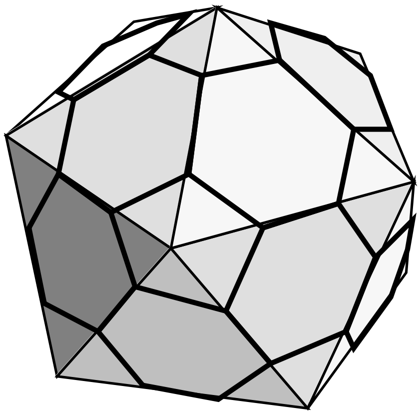
Jean-Michel Lemaire :

On va passer le film, mais donnez-moi encore deux minutes pour finir mon histoire.

Donc, Platon, il ne savait pas quoi faire de ce truc, le dodécaèdre. Il disait bon, d'accord, c'est Dieu qui l'a fait, mais on ne sait pas ce qu'il fait dans la nature. De fait, la situation a duré jusqu'il y a dix ans, on pensait que le dodécaèdre c'était un bel objet mathématique mais ça n'avait aucune application pratique, enfin mis à part celle-ci. C'est quoi ça ?



C'est un ballon de foot. Mathématiquement, ça s'appelle un icosaèdre tronqué. Vous voyez comment c'est fait, c'est fait avec 20 hexagones.

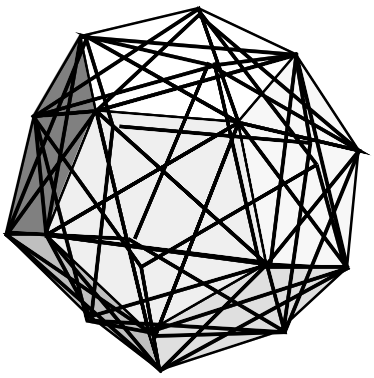


Si on fait un peu de chimie, les atomes de carbone, ça peut se mettre en forme d'hexagone pour former une molécule importante qui s'appelle le benzène. Ça peut se mettre aussi en hexagone dans un plan pour former une variété de carbone qui s'appelle le graphite.

Et on a découvert récemment que les atomes de carbone pouvaient aussi se disposer comme les sommets de cet icosaèdre tronqué. On appelle cela un fullérène, on dit quelque-fois un footballène aussi parce que c'est des molécules qui ont la forme d'un ballon de football. Et les propriétés physiques et chimiques de ces matériaux sont tout-à-fait surprenantes.

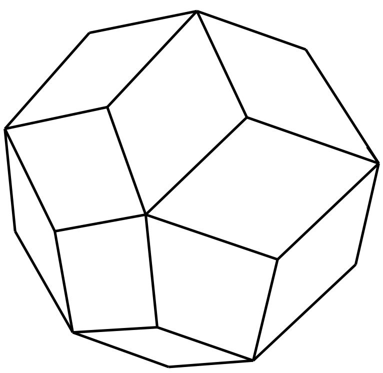
Par exemple, ils peuvent être supraconducteurs à des températures relativement élevées, on ne comprend pas bien pourquoi, et ils ont aussi des propriétés mécaniques étranges. Eh bien si on veut comprendre les propriétés de ces molécules, il faut savoir comment elles vibrent, quand on les fait chauffer par exemple. Et les modes de vibration des molécules, ils vont être invariants par les rotations qui conservent l'objet, donc ce qu'on appelle les représentations du groupe A_5 doivent permettre de mieux comprendre les propriétés physiques et chimiques du fullérène.

J'ai presque terminé. Je reprends mes petits cubes, là, ok ? à l'intérieur du dodécaèdre. Je vous ai dit qu'il y en avait cinq, alors je vous encourage à essayer de comprendre comment ils s'agencent entre eux, c'est une très jolie figure, cinq cubes qui sont enchevêtrés les uns dans les autres.



Alors imaginez que ces cubes sont pleins, et que vous prenez l'intersection de tous ces cubes, qu'est-ce qu'on va trouver ? On va trouver un très beau convexe — que voici, il a un nom abominable, il s'appelle le

triacontaèdre rhombique.



[*rires*] Ça veut dire qu'il a trente faces.

Alors ces faces, ce sont des losanges, ils ont l'air d'être la réunion de deux triangles équilatéraux, mais ce n'est pas vrai, en fait il y a le nombre d'or qui est dedans, le rapport entre le côté du dodécaèdre et le côté du cube qui est à l'intérieur c'est exactement le nombre d'or.

Et avec ces losanges, on peut former — suivant la méthode de Platon ! — deux parallélépipèdes, un assez plat et un allongé, et le miracle c'est qu'on peut paver tout l'espace avec ces deux parallélépipèdes, mais d'une manière très compliquée, *non périodique.* C'est un pavage qui n'est pas un cristal, mais qu'on appelle un *quasi-cristal,* et c'est le sujet du film que je vais vous montrer.

Alors, là encore, il y a des mathématiques tout à fait passionnantes sur les quasi-cristaux et des problèmes physiques qu'on ne comprend pas bien. Par exemple on peut montrer qu'il n'y a pas d'algorithme pour paver l'espace avec ces pavés, c'est-à-dire, il se peut très bien que, quand vous avez réussi à assembler un certain nombre de pavés, vous ne puissiez pas continuer sans être obligé de défaire votre assemblage. On démontre qu'il n'existe pas de méthode universelle qui vous dira à coup sûr si vous pouvez prolonger un assemblage fini donné en un pavage de tout l'espace.

Or on sait faire la synthèse des quasi-cristaux, on va vous le montrer dans le film, et ce qu'on aimerait bien comprendre par exemple comment se fait cette synthèse, parce que ce n'est pas une croissance comme celle d'un cristal … Il y a là des problèmes mathématiques tout à fait passionnants, qui relèvent de ce qu'Alain Connes appelle des mathématiques quantiques.

Voilà, je crois que j'ai assez parlé, on va regarder le film.

[*applaudissements.*]

[*Après le film.*] **Jean-Michel Lemaire :**

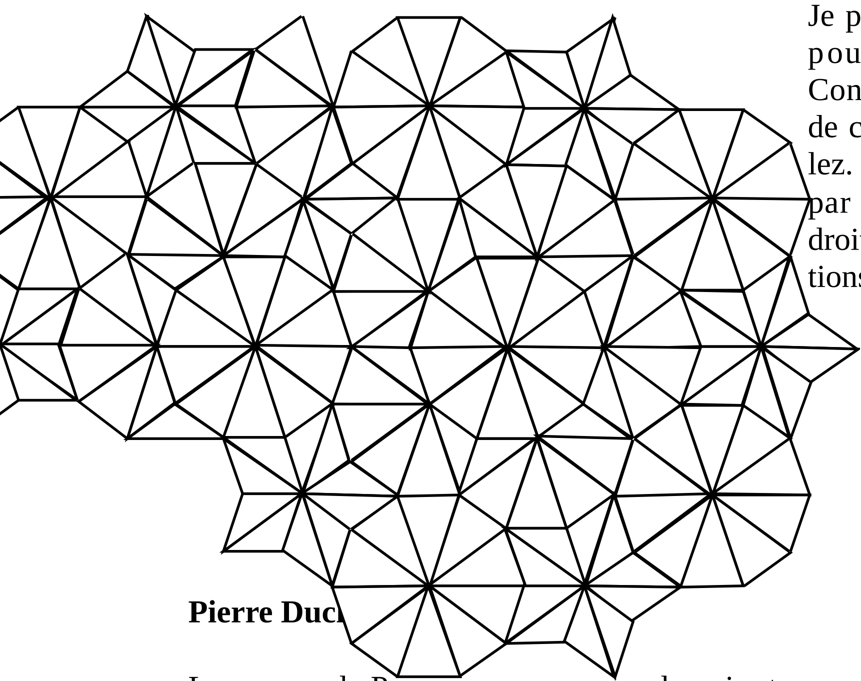
Est-ce qu'il y a des questions ?

Dans la salle :

Oui, si vous pouviez expliquer sur un dessin comment sont arrangés ces pentagones dans un quasi-cristal parce que là, dans le film, j'ai l'impression qu'il y a des pentagones mis les uns à côté des autres, mais il reste des trous entre, je ne sais pas si j'ai bien compris …

Jean-Michel Lemaire :

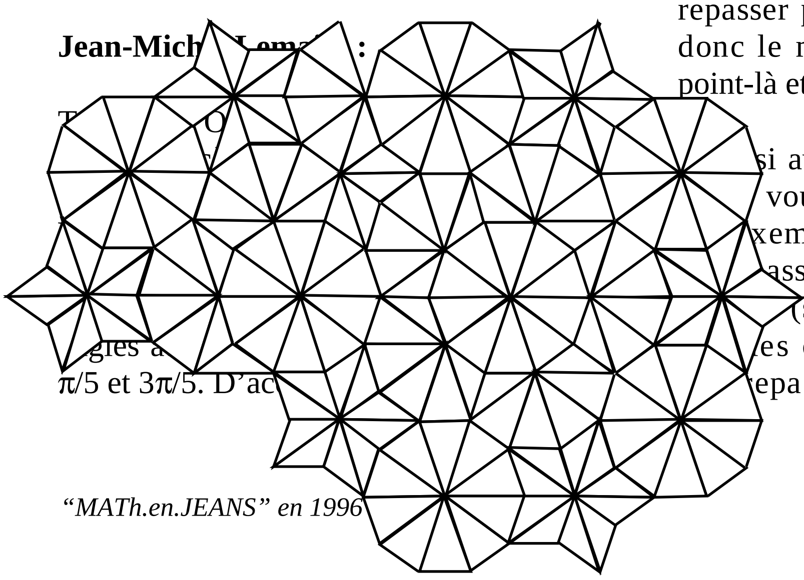
Je peux vous montrer un dessin d'un quasi-cristal plan ; vous voyez, il est constitué de deux sortes de triangles …



Pierre Duc

Le pavage de Penrose, vous pouvez le voir et le manipuler sur ordinateur au stand des IFS.

Jean-Mich Lema :



gles a

$\pi/5$ et $3\pi/5$. D'ac

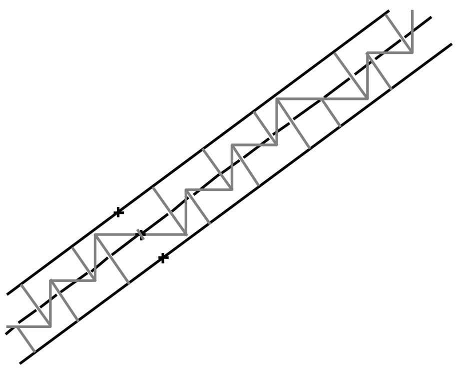
Ce que je n'ai pas dit et qui est suggéré dans le film, c'est la chose suivante. Katz et Duneau connaissaient les pavages de Penrose dans le plan. En écoutant l'exposé de Gratias, quand il a montré ses diagrammes de diffraction, ils ont brusquement réalisé que ces pavages sont des projections de pavages par des cubes, mais dans une dimension plus grande, six en l'occurrence. C'est ce qui explique précisément la notion de quasi-périodicité.

Pierre Duchet :

Ça rejoint la discussion qu'on avait hier sur la quatrième dimension.

Jean-Michel Lemaire :

Je peux essayer de vous faire un petit dessin pour vous montrer de quoi il s'agit. Considérez le pavage du plan par les carrés de côté 1, une feuille quadrillée si vous voulez. Si vous tracez une droite, disons passant par l'origine, vous obtenez un pavage de la droite par deux segments qui sont les projections des deux côtés d'un pavé carré.



Si la pente de la droite est rationnelle, elle va repasser par un autre point du quadrillage, donc le motif va se répéter à partir de ce point-là et ainsi de suite.

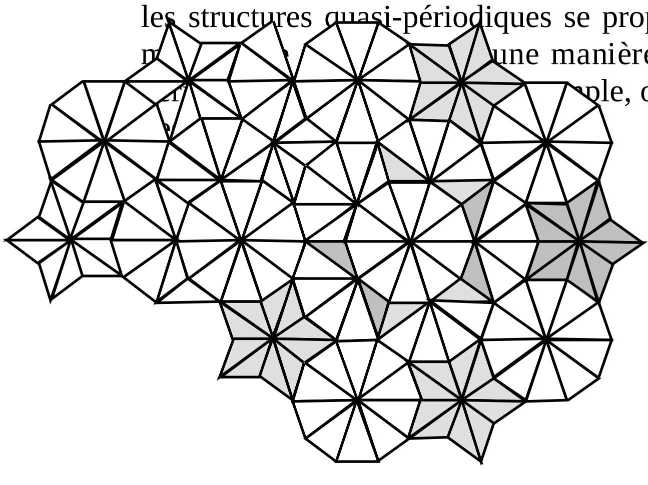
si au lieu de prendre une pente ration-
vous prenez une pente irrationnelle,
xemple le nombre d'or, votre droite
assera plus par aucun point du qua-
(sinon sa pente serait p/q où p et q
es coordonnées du point par lequel
epasse) ; à ce moment-là vous avez

encore un pavage par deux segments, mais ce pavage n'est plus périodique, mais il a quand même une certaine régularité, héritée du quadrillage : il est ce qu'on appelle quasi-périodique.

Si vous n'avez pas le vertige, vous pouvez essayer d'imaginer le pavage de l'espace à six coordonnées par des cubes, que vous projetez sur un sous-espace de dimension trois. Si ce sous-espace a des coordonnées irrationnelles, vous obtiendrez un pavage quasi-périodique de l'espace de dimension 3. Voilà un petit peu l'idée qu'on a vu transparaître dans le film. Je ne sais pas si j'ai répondu à votre question …

Le pentagone … évidemment avec des pentagones proprement dits vous ne pouvez pas vraiment paver l'espace, les premières figures qu'on a vues montrent des pavages "avec des trous", c'est ce qu'on appelle en cristallographie des *macles,* et ça c'était connu depuis fort longtemps : si vous avez regardé par exemple des cristaux de pyrite, on voit des formes qui ressemblent un peu à ça mais en fait les faces ne sont pas exactement des pentagones, ce sont des pentagones qui sont un peu tordus, on peut voir des sortes de symétries d'ordre cinq mais qui ne sont pas des symétries à longue distance, c'est des symétries locales et puis après il y a des trous et ça se réarrange en fait suivant un réseau plus ou moins cristallin.

C'est-à-dire que localement on peut voir effectivement des structures d'ordre cinq, mais elles ne se propagent pas. Alors que là, les structures quasi-périodiques se propagent m[illegible] une manière non-[illegible]ple, on voit [illegible]



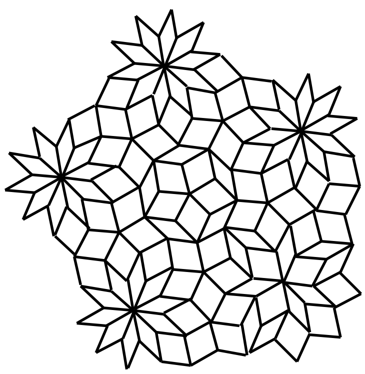
A ce point il y a un théorème très curieux : si vous prenez tous les pavages de Penrose possibles, faits des mêmes pavés, on peut démontrer premièrement qu'il y en a une infinité non-dénombrable, mais que si on en prend deux quelconques, toute partie finie de l'un se retrouve quelque part dans l'autre; cela signifie qu'il n'existe pas de distance raisonnable sur l'ensemble de ces pavages. Alain Connes explique que pour étudier l'ensemble de ces pavages, il faut définir de nouveaux outils qui sont des fonctions à valeurs dans des choses qui ne commutent pas, des algèbres *non-commutatives*, c'est ça l'idée de la géométrie non-commutative.

Pierre Duchet :

Alors, on va peut-être encore prendre deux interventions. . .

Jean Brette :

Je voudrais juste faire une remarque sur la question de savoir où sont les pentagones, telle qu'elle a été posée, peut-être une façon de le dire, quand on regarde, c'est de passer par la cristallographie : si on regarde une source lumineuse très loin à travers un rideau de tulle, on va voir effectivement un réseau qui a un certain nombre de symétries et ces symétries correspondent à la maille, en fait. Par exemple, si c'est une trame et une chaîne, ce qu'on verra, c'est des réseaux qui en gros ont des symétries carrées. Si on envoie des rayons X sur un quasi-cristal, on voit effectivement des pentagones partout, ce qu'on a vu dans le film et ce qu'on voit aussi sur la pochette qui nous a été distribuée …



Jean-Michel Lemaire :

Oui sur la plaquette du département SPM. En fait on voit plutôt des décagones d'ailleurs, mais enfin, décagone ou pentagone, c'est pareil …

Jean Brette :

Oui, il y a des symétries d'ordre cinq. Alors justement j'ai une question sur cette plaquette. A l'intérieur on voit deux superbes cristaux, enfin, quasi-cristaux qui ressemblent à des dodécaèdres avec une légende qui nous dit que c'est une phase icosaédrique, alors je sais bien qu'il y a une parenté entre les deux, mais pourquoi icosaédrique quand on montre des dodécaèdres ?

Jean-Michel Lemaire :

Oh ! mais ils ont le même groupe de symétries, c'est ce que j'ai dit tout à l'heure.

Jean Brette :

Oui, oui, je suis d'accord sur le fait que c'est le même groupe, mais c'est bizarre comme dénomination, non ?

Jean-Michel Lemaire :

C'est vrai qu'on dit toujours le groupe de l'icosaèdre. On ne dit pas le groupe du dodécaèdre. Pourquoi, je n'en sais rien, peut-être que ça remonte à Platon, parce que pour Platon, l'icosaèdre était moins mystérieux que le dodécaèdre. Parce qu'il était fait avec des triangles.

Pierre Duchet :

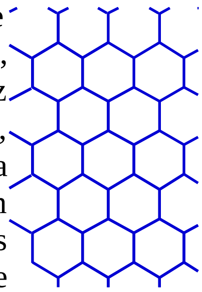
Voilà. Une dernière intervention …

Question :

Moi, ce que je voulais demander c'est qu'à un moment, le physicien, il trouve qu'il y a quelque chose qui cloche dans son expérience, et c'est à partir de là qu'il se pose la question, c'est à partir de là qu'on va découvrir les quasi-cristaux, et c'est là que je n'ai pas bien compris, parce que peut-être que ça a un rapport avec ce que vous avez dit tout à l'heure, mais qu'est-ce que c'est exactement un cristal, physiquement ou mathématiquement, et ensuite qu'est-ce que c'est par rapport au cristal, le quasi-cristal ? Et comment on a fait pour le découvrir à partir de sa méthode, et donc où était la bizarrerie ?

Jean-Michel Lemaire :

Ah, d'accord. Très bien. Qu'est-ce que c'est qu'un cristal ? Je n'ai pas essayé de le définir, d'abord parce que je ne suis pas cristallographe, je suis mathématicien, mais l'idée, c'est toujours cette idée d'ordre. Ordre dans la matière.



Les cristaux possèdent une invariance par translation, par exemple, si vous regardez un pavage par des hexagones, en Provence on appelle cela des tommettes, quand on se déplace dans certaines directions, on retrouve le même motif.

Un cristal parfait admet des translations qui le laissent invariant, dans trois directions indépendantes de l'espace. Alors, avec cette définition de cristaux, tous les cristaux possibles ont été classifiés à la fin du siècle dernier. En plus des translations, il y a des symétries de type rotation. Et on sait que les seules rotations possibles sont d'angle 2π divisé par deux, trois, quatre ou six.

Mais pas cinq. Cinq est interdit : dès lors que vous avez suffisamment de translations dans vos isométries, vous ne pouvez pas avoir une rotation d'ordre cinq. Ça, c'est un théorème de mathématiques.

Alors, qu'est-ce qui s'est passé quand le physicien a découvert sa substance ? Elle avait des propriétés qui ressemblaient à celles d'un cristal, car son diagramme de diffraction par rayons X était formé de points, mais ce diagramme avait l'air d'être invariant par une rotation d'ordre cinq.

Là ça n'allait plus parce que tout le monde savait que si c'est un cristal, il ne pouvait pas avoir une symétrie d'ordre cinq. Alors les gens lui ont dit, mais ton truc c'est pas un cristal. D'accord, il y a une symétrie d'ordre cinq locale mais en fait globalement ça doit avoir la symétrie d'un cristal connu. Il a recommencé ses manips, et il a continué à voir des cinq partout. Donc il s'agissait de quelque chose qui était intermédiaire entre le désordre et le cristallin. Et c'est ça la notion de quasi-cristal. Mathématiquement ça correspond à ce qu'on appelle quelque chose de quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il y a une périodicité mais elle vit dans une dimension plus grande, et on n'en voit qu'une projection sur un sous-espace qui a une pente irrationnelle avec les axes de coordonnées.

En fait, des mathématiciens connaissaient déjà ces choses-là, mais ne les avaient pas du tout regardées dans l'esprit de chercher des matériaux, ou des cristaux. Le film le dit d'ailleurs en passant, Penrose, lui-même, pourtant physicien théoricien, a découvert ses pavages pour résoudre des problèmes de logique et de combinatoire et pas du tout pour représenter des matériaux réels.

J'espère que je n'ai pas été trop obscur, et si vous le permettez, je vais devoir m'arrêter là. Merci en tout cas de m'avoir écouté.

[*applaudissements*.]

Pierre Duchet :

Merci d'avoir pris sur ton temps, et merci encore au département des sciences physiques et mathématiques du CNRS pour avoir rendu notre manifestation possible.