approximation par des fractions : racines carrées

par Mlle Claire Juramy, Mlle Marie Drago, M. Hervé Goldfarb, M. Emmanuel Doumas, élèves de 1°S du **lycée La Fontaine de Paris (75)**, établissement jumelé avec le **lycée Buffon de Paris (75)**

enseignante :
Mme Ghislaine Gaudemet
Mme Marie Lattuati, M. Biscarat

chercheur :
M. Gilles Godefroy, CNRS.

Pas de compte-rendu de parrainage.

thème de l'exposé :

• Comment, par une méthode géométrique simple, lire graphiquement les premières approximations du nombre √2 ?
• Comment dépasser rapidement la précision des calculatrices, en construisant une suite de rationnels approchant √2 ?
• Extension de la recherche aux approximations de tout nombre $\sqrt{a}$, a entier naturel non "carré". Difficultés dans la recherche du premier terme de la suite permettant de démarrer le processus d'approximation.

NI — Approximation par des fractions : racines carrées. 36

Les Grecs était très perplexes devant l'impossibilité de représenter √2 par une fraction, alors que ce nombre apparaît naturellement en géométrie : la diagonale d'un carré de côté 1 mesure précisément √2.

En fait, aucune "vraie fraction" (une fraction qui n'est pas un entier) ne peut, lorsqu'on la multiplie part elle-même, donner un résultat entier.

A défaut de les atteindre exactement, comment peut-on approcher au mieux ces nombres *irrationnels* ?

Le problème.

Il s'agit de trouver une suite de couples d'entiers (X , Y) solutions de l'équation diophantienne :

$$X^2 – aY^2 = 1$$

avec (X , Y) différent de (1; 0) et a un entier qui ne soit pas un carré parfait.

Cela revient à : $(X / Y)^2 = a + 1/Y^2$, c'est-à-dire que quand Y tend vers l'infini, X / Y tend vers $\sqrt{a}$. On obtiendra donc des approximations de $\sqrt{a}$ sous forme de fractions.

Pour obtenir une suite de fractions convergeant vers $\sqrt{a}$, nous utiliserons *la méthode de Newton* . A partir de ces fractions, nous chercherons des couples (X , Y) solutions.

Exemple sur a = 2.

Pour simplifier le problème, nous avons commencé par l'étude complète de cet exemple.

Méthode de Newton :

On trace la parabole C_f d'équation :

$$y = x^2 – 2.$$

[NDLC : les élèves n'ont pas fourni de dessin accompagnant leur texte ; il semble nécessaire que le lecteur dispose d'un support graphique pour comprendre la méthode graphique qui est ici exposée. Voir figure, page suivante.] Elle coupe l'axe des abscisses en $A(\sqrt{2}\ ;0)$. On prend un point sur C_f , par exemple $B_0(2\ ;\ 2)$. On trace la tangente D_0 à C_f en B_0, elle a pour équation :

$$y = f'(2)x + p,$$

$$\text{soit } y = 4x + p,$$

(comme B_0 appartient à D_0), $y = 4x – 6$.

Elle coupe l'axe des abscisses en $A_1(x_1\ ;\ 0)$. On peut calculer x_1 :

$$0 = 4x_1 – 6$$

$$x_1 = 3/2.$$

On prend B_1 le point de la courbe à la verticale de A_1, et on recommence le même calcul à partir de B_1, qui a pour coordonnées $(3/2\ ;\ (3/2)^2 – 2)$, soit $(3/2;1/4)$.

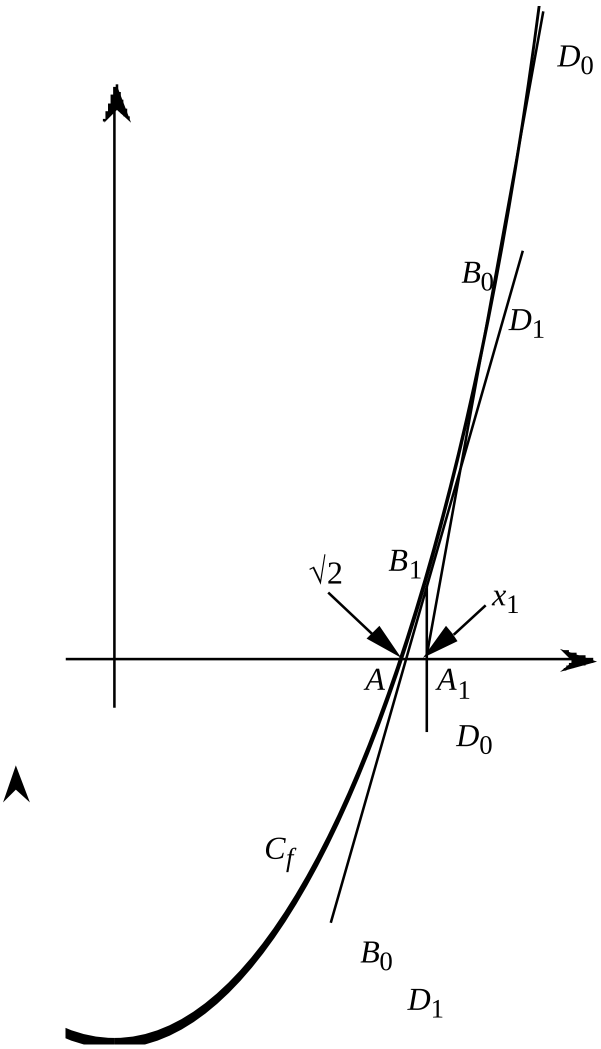
D_1 a pour équation : $y = 3x + p$, $p = –17/4$, d'où $A_2(17/2\ ;\ 0)$. On obtient ensuite $A_3(577/408\ ;\ 0)$, $A_4(665857/470832\ ;\ 0)$, … [NDLC : oh, ben, v'là ben des fractions ! c'est-y qu'si les calculatrices n'existaient pas qu'i' faudrait les inventer !] La calculatrice donne :

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$$

et on obtient :

$$17/12 = 1{,}416\ldots,\ 577/408 = 1{,}414216\ldots,$$

pour 665857/470832, elle ne fait plus la différence. On s'approche effectivement de $\sqrt{2}$.



Relation de récurrence :

L'étape suivante est de généraliser. On calcule l'équation de D, tangente à la courbe au point $B(x_n\ ;\ x_n^2 – 2)$:

$$y = 2x_n x + p$$

$$p = x_n^2 – 2 – 2x_n^2.$$

On obtient alors les coordonnées de $A''(x_{n+1}\ ;\ 0)$, point d'intersection de D avec l'axe des abscisses :

$$x_{n+1} = (x_n^2 + 2)/2x_n$$

qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = x_n/2 + 1/x_n.$$

☞ On a ainsi une relation de récurrence qui permet d'approximer $\sqrt{2}$ par des fractions (on peut prendre n'importe quel rationnel positif pour x_0).

Etude de la suite :

On voudrait maintenant savoir avec quelle rapidité (x_n) converge vers $\sqrt{2}$.

On a pris pour ce calcul $x_0 = 3/2$.

On démontre d'abord par récurrence que $1 < x_n < 2$ pour tout n (en effet, si $1 < x_n < 2$, alors $1 < x_{n+1} < 2$).

On calcule ensuite :

$$x_{n+1} – x_n = (x_n – x_{n–1})(1/2 – 1/x_n x_{n–1})$$

Or $1 < x_{n–1}x_n < 4$, d'où

$$–1/2 < 1/2 – 1/x_n x_{n–1} < 1/4,$$

soit $|1/2 – 1/x_n x_{n–1}| < 1/2$. En multipliant par $|x_n – x_{n–1}|$, on obtient :

$$|x_{n+1} – x_n| < 1/2\ |x_n – x_{n–1}|$$

On a la même inégalité pour $x_{n–2}$, $x_{n–3}$, … , x_2, x_1, x_0. En multipliant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, on aboutit à :

$$|x_{n+1} – x_n| < (1/2)^n\ |x_1 – x_0|$$

√2 B_1

x_1

et en prenant pour x_0 et x_1 les valeurs de départ :

$$|x_{n+1} - x_n| < (1/2)^n \times 1/12$$

Donc la différence entre x_n et x_{n+1} tend très vite vers 0 [puisqu'elle est majorée par une suite géométrique de raison 1/2].

Des solutions de l'équation :

Pour obtenir le couple (X , Y), nous prenons $x_n = X / Y$. Nous avons alors :

$$x_{n+1} = (X^2 + 2Y^2)/(2XY).$$

Nous obtenons un autre couple. Mais nous avons très vite remarqué que toutes les approximations de $\sqrt{2}$ ne nous donnent pas des couples solutions.

Cependant, en calculant pour le couple ($X^2 + 2Y^2$, $2XY$), correspondant à x_{n+1}, l'expression s'écrivant $X^2 - 2Y^2$ pour le couple (X , Y), on obtient :

$$(X^2 + 2Y^2)^2 - 2(2XY)^2$$
$$= X^4 + 4X^2Y^2 - 8X^2Y^2 + 4Y^4$$
$$= (X^2 - 2Y^2)^2.$$

☞ Nous avons ainsi démontré que si le couple obtenu avec x_n est solution [c'est-à-dire si $X^2 - 2Y^2 = 1$], le couple obtenu avec x_{n+1} par la relation de récurrence l'est aussi.

Nous remarquons que (3 , 2) est solution :

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 1.$$

A partir de ce couple, nous pouvons établir une suite de couples d'entiers solutions :

(17 , 12), (577 , 408), …

C'était notre premier but. Il faut noter que c'est par chance que nous avons commencé par $x_0 = 2$, qui a donné $x_1 = 3/2$, d'où le couple. Nous avons trouvé, par hasard aussi, un autre couple solution :

(99 , 70),

d'où une autre suite.

Nous pouvons passer à …

Généralisation à a quelconque.

Pour a, le principe est le même :

Relation de récurrence :

On trace la parabole d'équation : $y = x^2 - a$, qui coupe l'axe des abscisses en $A(\sqrt{a}\ ;\ 0)$.

Le point $B(x_n\ ;\ x_n^2 - a)$ appartient à C_f ; D est la tangente à C_f en B ; $A'(x_{n+1}\ ;\ 0)$ est l'intersection de D avec l'axe des abscisses.

équation de D :

$$y = f'(x_n)x + p,\ p = -x_n^2 - a$$

d'où $x_{n+1} = (x_n^2 + a)/2x_n$, ou bien

$$x_{n+1} = 1/2 \times (x_n + a/x_n).$$

M. Godefroy nous a expliqué qu'il s'agit de l'algorithme de Héron (ou de Newton, et pour cause). Il nous a aussi fait remarquer que, comme (x_n) converge vers $\sqrt{a}$, cela revient à écrire :

$$\sqrt{a} = 1/2 \times (\sqrt{a} + a/\sqrt{a}),$$

ce qui est normal. Nous avons trouvé notre relation.

Nous pouvons passer à …

Equation diophantienne :

Le passage de la suite aux couples se fait de la même manière que pour $a = 2$.

On prend $x_n = X / Y$, et on obtient :

$$x_{n+1} = (X^2 + aY^2)/(2XY).$$

On a aussi :

$$(X^2 + aY^2)^2 - a(2XY)^2 = \ldots = (X^2 - aY^2)^2$$

C'est-à-dire que si x_n donne un couple solution, les couples obtenus par la relation seront solutions.

Nouveau problème :

Il nous reste un dernier problème : trouver le premier couple … Après plusieurs essais, nous ne trouvons rien d'autre que la solution la plus lourde : calculer tous les carrés d'entiers pour avoir X^2, retrancher 1, et décomposer le résultat en facteurs premiers pour trouver un Y^2 et un a.

Par exemple, en partant de $X = 7$, on a

$$X^2 - 1 = 48 = 3 \times 24,$$

d'où $Y = 4$ et $a = 3$. Donc pour l'équation diophantienne $X^2 - 3Y^2 = 1$, le premier couple solution sera (7 , 4). Le deuxième sera (72 + 3×42 , 2×7×4), c'est-à-dire (97 , 56) ; et ainsi de suite …

Pour réduire les calculs nécessaires pour un a donné, nous avons observé que, si on prend $X = a \pm 1$,

$$X^2 - 1 = (a \pm 1)^2 - 1 = \ldots = a(a \pm 2),$$

il suffit alors que $a \pm 2$ soit un carré parfait (c'est Y^2).

Par exemple pour $a = 47$:

on peut avoir $a + 2 = Y^2 = 72$, d'où : $X^2 = aY^2 = 47 \times 49 + 1 = 2304 = 48^2$. Le couple (48 , 7) est le premier solution de l'équation $X^2 - 47Y^2 = 1$.

On peut élargir cette remarque, avec k un entier, en prenant $X = ak \pm 1$, d'où :

$$X^2 - 1 = ak\,(ak \pm 2).$$

Il reste alors à trouver $Y^2 = k\,(ak \pm 2)$. Deux cas se présentent alors :

— si $k = 2$, $Y^2 = 4(a \pm 1)$. Il suffit que $a \pm 1$ soit un carré parfait. Par exemple pour $a = 17$, on obtient ainsi (33 , 8) comme premier couple.

— sinon, il faut que k et $ak \pm 2$ soient des carrés parfaits. Ce cas est encore peu éclairci à ce jour. Cependant, les k carrés de nombres pairs semblent à éliminer, car ak est alors divisible par 4, donc $ak \pm 2$ ne l'est que par 2 et ne peut être un carré.

Dans l'ensemble, notre solution de ce dernier problème est donc peu satisfaisante, même si elle nous permet d'obtenir un certain nombre de résultats.

[NDLC : la *marge* serait-elle trop étroite pour contenir une solution satisfaisante ? l'équation diophantienne du départ garde ainsi un peu de son mystère …]