

trajectoires périodiques et billard triangulaire

par M. Salim Benhabib (1^oS), Mlle Farah Arab (2nde), M. Sylvain Dumon (PCSI) élèves du **lycée Paul Eluard de Saint Denis (93)** et Mlle Ilaf Emraz, Mlle Clara Toulouse, Mlle Emilie Barbaut, Mlle Silhame Naït-Ahmed, élèves du **collège Jean Vilar de Villetaneuse (93)** et M. Laurent Nguyen Thay, M. Julien Martin, Mlle Caroline Peyrol, M. Jérémy Saada, élèves de TS du **lycée Jacques Feyder d'Épinay sur Seine (93)**

enseignants :

M. Adrien Fryc

MM. Yves Alvez, Alain Huet, Nolwen

Labbé-Poquet

Mme Gwenola Madec, M. Marc Anquetil

chercheur :

M. François Parreau

coordination article : Peyrol Caroline

compte-rendu de parrainage :

Des élèves des lycées Paul Eluard, Jacques Feyder et du collège Jean Vilar ont présenté un exposé sur le billard triangulaire ou plus précisément les trajectoires périodiques dans le triangle. Ils en ont trouvé dans tous les triangles quelconques à angles aigus et font des recherches sur ceux à angles obtus.

Leur exposé était intéressant, mais il est dommage qu'il ait été interrompu par des questions, ce qui les a déstabilisés.

NCES — Billard triangulaire et trajectoires périodiques 15

L'origine de ce problème est l'étude de gaz confinés dans un récipient : les molécules rebondissent sur les parois. Comment obtenir dans un triangle des trajectoires de particules qui, périodiquement, rebondissent sur les parois ?

Conditions initiales et vocabulaire.

Pour mener à bien notre recherche, nous utilisons le phénomène physique de la réflexion (Fig. 1) et le principe mathématique des symétries (Fig. 2) (en se basant sur la prolongation de la trajectoire sur une droite).

Nous supposons que la balle est ponctuelle. De ce fait nous négligeons toutes les trajectoires passant par un coin.

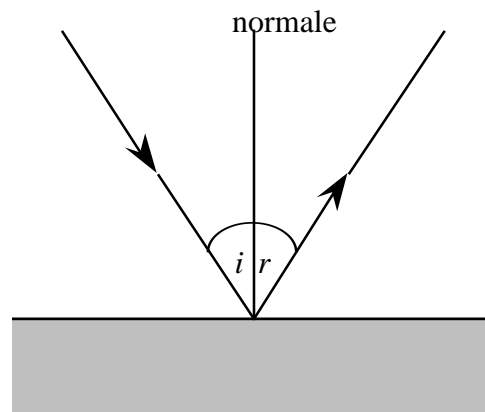


Figure 1.— la réflexion.

Dans notre recherche, nous utiliserons le terme “nombres de touchés” pour caractériser le nombre de côtés qui seront touchés par la balle au cours du parcours lorsque celle-ci repassera à sa position initiale.

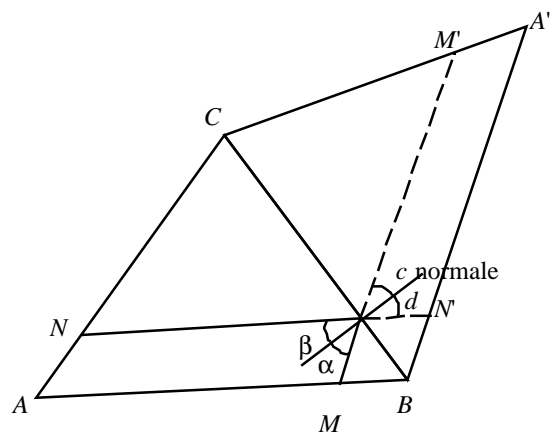


Figure 2.— la symétrie.

Tous les résultats présentés ne sont vrais que pour des triangles ne comportant aucun angle obtus.

Equivalence des outils utilisés.

Pour le principe de la réflexion, comme le montre la figure 1, l'angle entre le rayon incident (i) et la normale à la surface est égal à l'angle entre le rayon réfléchi (r) et la normale. Soit $i = r$.

Le système des symétries revient au même mais considéré d'un autre point de vue : la réflexion utilise l'arithmétique (calcul des angles au rapporteur) tandis que les symétries (Fig. 2) utilisent la géométrie (une règle et un compas).

La démonstration de l'équivalence des deux outils est la suivante :

Par prolongement du segment $[OM]$, nous pouvons écrire que $c = \alpha$. De même, par prolongation de $[ON]$, $d = \beta$. Or, par réflexion, $\alpha = \beta$ donc $c = \beta$.

Puisque $CA = CA'$ alors $ON = OM'$. Puisque $BA = BA'$ alors $BM = BN'$. Nous retrouvons donc la trajectoire MON sur la droite (MM') .

L'utilisation de ces deux méthodes nous a permis de trouver des résultats similaires bien que la seconde méthode soit plus fiable.

Le triangle équilatéral.

Conjectures et démonstrations d'observations :

— Il n'existe pas de trajectoire périodique en un seul touché puisqu'il faut au moins un aller et un retour pour effectuer une trajectoire formée de lignes droites.

— Puisque nous négligeons les trajectoires passant par les sommets la trajectoire à deux touchés n'est pas possible.

— La seule trajectoire périodique trouvée en trois touchés dans le triangle équilatéral est la suivante : la balle est positionnée au milieu d'un côté et l'angle de départ est de 60° . Avec de telles conditions initiales la figure formée sera un triangle équilatéral résultant d'une homothétie dont le centre est l'orthocentre O du triangle et de rapport $-1/2$. Le parcours effectué par la balle sera alors le tiers du périmètre.

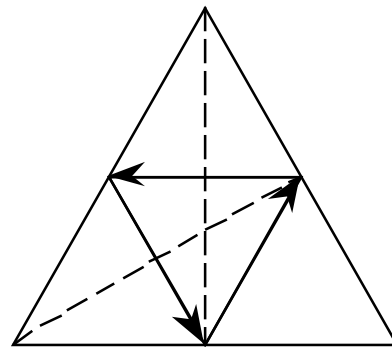


Figure 3.a.—
trajectoire
à 3 touchés
dans le triangle
équilatéral.

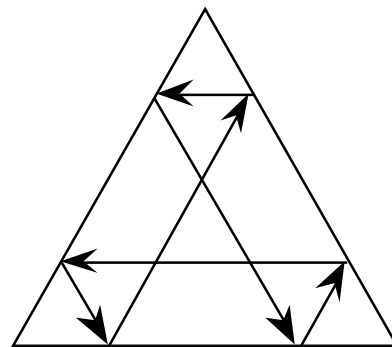


Figure 3.b.—
trajectoire
à 6 touchés
dans le triangle
équilatéral.

Si la balle n'est pas positionnée au milieu d'un côté, on démontre que la trajectoire reste périodique mais sera de six touchés. La balle parcourt alors une trajectoire équivalente au périmètre du triangle. (Fig. 3.a, Fig. 3.b).

— La seule trajectoire trouvée en quatre touchés est la suivante : la balle est positionnée sur un côté et on tire à 30° . La balle rebondit alors perpendiculairement sur les côtés adjacents au côté initial et revient. (Fig. 4).

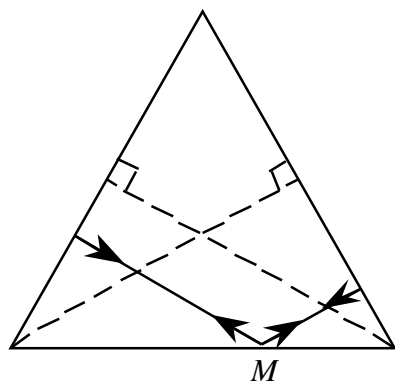


Figure 4.—
trajectoire
à 4 touchés
dans le triangle
équilatéral.

— La trajectoire à six touchés est une généralisation de la trajectoire à trois touchés. (Fig. 3.b, page précédente.)

Généralisation.

Une généralisation des phénomènes périodiques dans le triangle équilatéral a été trouvée avec l'utilisation des symétries d'une façon originale ...

On fixe le lieu de départ de la balle M et l'angle initial θ . On dessine la droite passant par M d'angle θ . On construit ensuite un pavage de triangles symétriques organisés le long de la droite (Fig. 5).

On remarque que si on trouve, le long de la droite, un triangle parallèle au triangle initial où la droite coupe la parallèle au côté de départ à la même distance des sommets, alors la trajectoire reconstituée dans le triangle initial sera périodique. On notera N le point ainsi placé.

Géométriquement, on prouve l'existence de la trajectoire périodique grâce à une utilisation récurrente inverse de la construction des symétries. Les positions du triangle, de la droite et de la balle sont alors des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de la trajectoire périodique.

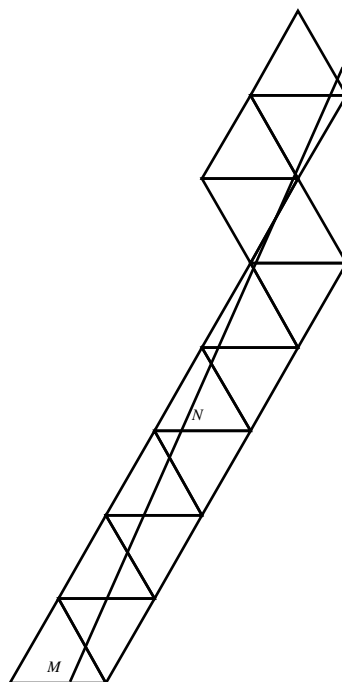


Figure 5.—
construction de
triangles
symétriques
le long de
la droite (MN).

Exemple : reprise de la trajectoire à 6 touchés (Fig. 6). On trace la droite passant par M d'angle 60° . On l'arrête lorsque l'on trouve un triangle parallèle au triangle initial le long de celle-ci.

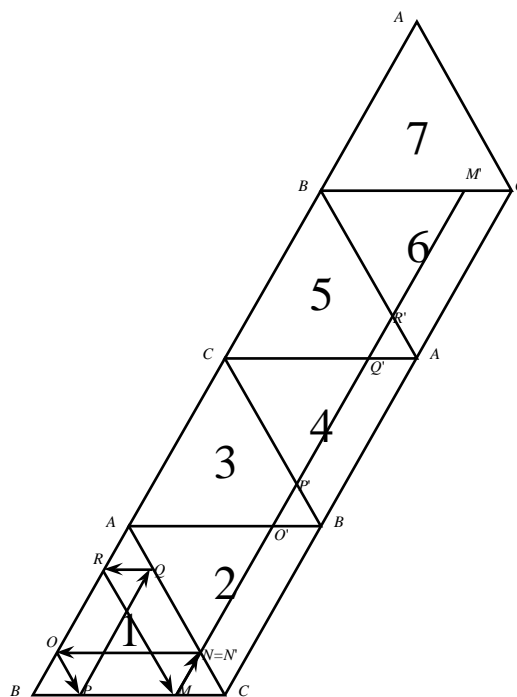


Figure 6.— On retrouve la trajectoire à 6 touchés
 $MNOPQR$ sur la droite (MM').

Si on reprend les segments de la droite dans les triangles 1 à 7, on retrouve, dans le triangle 1, la trajectoire périodique décrite par la balle.

Algébriquement, nous démontrons qu'il existe une infinité de trajectoires périodiques dans ce type de figure, en utilisant un repère dont les axes sont la base du triangle initial et un des côtés adjacents.

Le triangle rectangle.

Résultats d'observations :

En ce qui concerne des cas plus particuliers, nous avons trouvé des résultats dans le triangle rectangle :

Si on tire perpendiculairement à un côté qui n'est pas l'hypoténuse et si les deux angles non droits du triangle sont tels que le premier fasse deux fois le second alors la trajectoire de la balle sera de six touchés (Fig. 7.a) ; si le premier fait quatre fois le second, le trajectoire sera de dix touchés (Fig. 7.b).

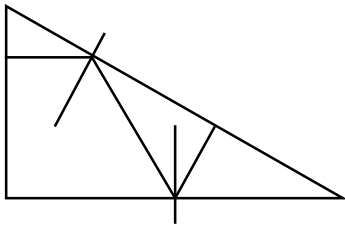


Figure 7.a.— triangle rectangle où $\beta = 2\alpha$.

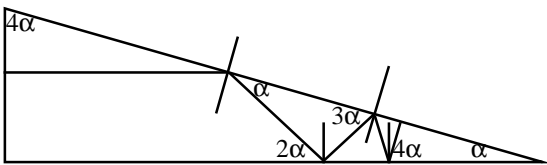


Figure 7.b.— triangle rectangle où $\beta = 4\alpha$.

Généralisation :

L'angle formé entre la trajectoire et les côtés du triangle aux lieux de touche est un des termes de la suite récurrente : (θ_i)

$\theta_{i+1} = \theta_i - 90/(n+1)$ avec $\theta_0 = 90^\circ$, i entier naturel. On peut noter (θ_n) de la forme :

$$\theta_i = \theta_0 - 90 \times i/(n+1).$$

On obtient le dernier angle lorsque $\theta_j = 0$ soit $j = n+1$. Le nombre de touchés sera alors de $2 \times (n+1)$.

Le triangle isocèle.

Nous ne nous sommes pas attardés sur les trajectoires dans le triangle isocèle mais nous conjecturons l'existence infinie de trajectoires périodiques pour des triangles dont l'angle au sommet est un sous-multiple de 180° . Comme pour le triangle équilatéral, un pavage pourra être formé.

Le triangle isocèle rectangle.

Nous remarquons que deux triangles isocèles rectangles accolés suivant l'hypoténuse forment un carré. Nous pouvons donc former un pavage régulier avec de tels triangles.

Suivant la méthode utilisée pour les triangles équilatéraux, si on crée un repère dont les axes sont les côtés de l'angle droit du triangle initial, on remarque que l'angle droit des triangles homologues a pour coordonnées $(2Xa, 2Ya)$ dans le repère orthonormé où X et Y sont des entiers relatifs et a le côté du triangle.

L'angle de tir de la balle est tel que

$$\tan(\theta) = Y/X.$$

Le triangle quelconque.

Résultats d'observations :

On conjecture l'existence d'une infinité de trajectoires périodiques sur le principe des symétries pour des triangles quelconques. (Fig. 8). Tout est valable si le triangle ne comporte aucun angle obtus. [NDLC : un tel triangle sera dit « orthique », rappelant ainsi que si les trois angles sont aigus, l'orthocentre, point de concours des trois hauteurs, est à l'intérieur du triangle.]

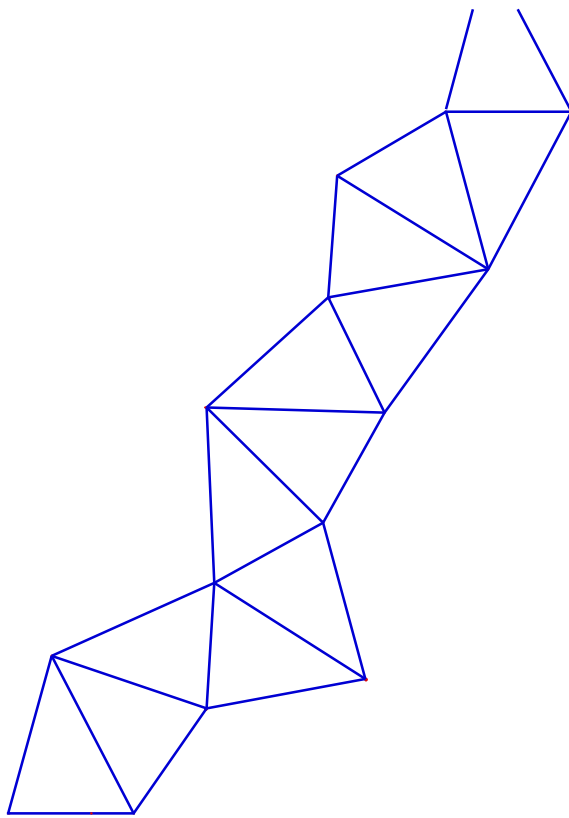


Figure 8.

Triangles orthiques :

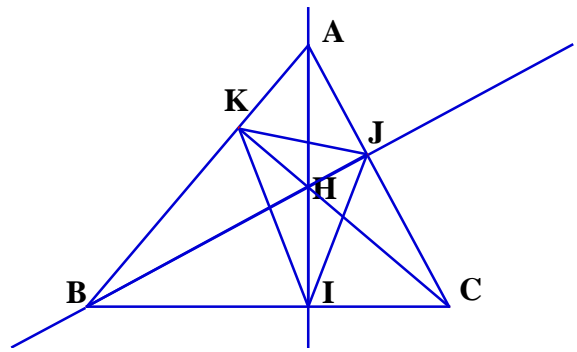


Figure 9.a.— triangle orthique.

Démonstration : (Fig. 9.a)

Soit ABC un triangle quelconque I, J et K les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement et H l'orthocentre du triangle. Les points B, H, I, K appartiennent au cercle de diamètre BH . Grâce au théorème de l'angle inscrit, nous pouvons écrire que l'angle KBH est égal à l'angle KIH . De même, on démontre que les points B, A, I et J appartiennent à un cercle de diamètre BA et que l'angle AIJ est égal à l'angle ABJ .

Puisque l'angle KBH est égal à l'angle ABJ , alors l'angle KIH est égal à l'angle AIJ . Donc (IK) et (IJ) sont symétriques par rapport à (AI) , (AI) est bissectrice de l'angle KIJ . On démontre de même que (BJ) est la bissectrice de l'angle IJK et que (CK) est la bissectrice de l'angle JKI .

On peut étendre cette démonstration pour démontrer que toute trajectoire dont le départ se fait parallèlement à une hauteur du triangle sera une trajectoire périodique à 6 touchés. (Fig. 9.b).

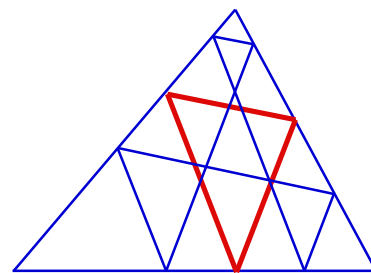


Figure 9.b.— généralisation du triangle orthique.

Réciproque :

Soit M l'origine de la trajectoire ($M \in [AC]$ sur la figure 10.a), N' et P' les symétriques de M par rapport aux autres côtés, N et P les premier et deuxième touchés, sur ces mêmes côtés. La trajectoire sera périodique en 3 touchés si et seulement si :

le troisième touché est M [1]
et le quatrième touché est N [2].

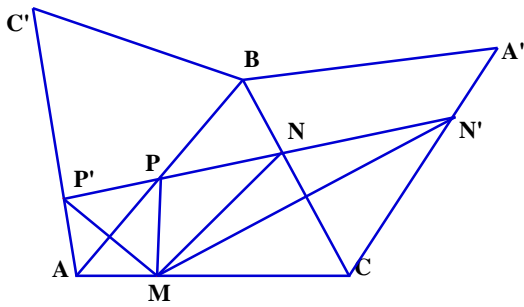


Figure 10.a.

Mais, [1] $\Leftrightarrow BNP = CNM$ et $APM = BPN$ respectivement.

Comme $CNM = CNN'$ et $APM = APP'$, [1] $\Leftrightarrow BNP = CNN'$ et $BPN = APP' \Leftrightarrow N', N$ et P sont alignés et P', N et P sont alignés. Ainsi, [1] $\Leftrightarrow N$ appartient à $(N'P')$.

On suppose [1] vérifiée.

[2] \Leftrightarrow les angles AMP et CMN sont égaux
 $\Leftrightarrow AMB - BMP = CMB - BMN$.

Montrons (Fig. 10.b) que $BMP = BMN$: d'une part, $BMP = BP'P$ et $BMN = BN'N$, d'autre part $BP' = BM = BN'$, donc le triangle $BP'N'$ est isocèle, $BP'P = BN'N$; ainsi $BMP = BMN$, d'où :

Si [1] est vérifiée, [2] $\Leftrightarrow AMB = CMB$. La périodicité entraîne donc que M est le pied de la hauteur issue de B . La périodicité des touchés N, P et M entraîne celle des touchés P, N et M ou des touchés M, N et P .

Donc N et P sont aussi des pieds de hauteurs.

Remarque :

Nous n'avons aucun résultat pour des triangles à angles obtus.

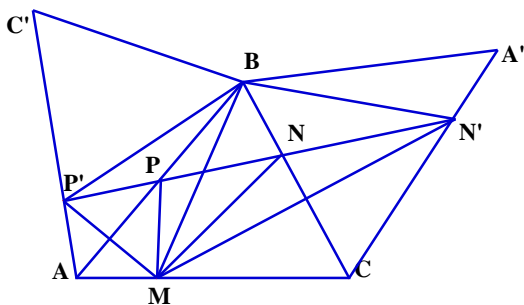


Figure 10.b.