la nouvelle étoile du berger

Film et discussion avec

Jean-Pierre Bourguignon *(IHÉS)* (professeur à l'Ecole Polytechnique ; auteur du Film avec François Tisseyre et Claire Weingarten, de l'Association *Ecoutez Voir*, corécipiendaire du Prix d'Alembert 1996, pour l'ensemble des films qu'elle a produits),

Jean Brette (responsable du département de mathématiques du Palais de la Découverte ; acteur dans le film, conseiller en coulisses),

le public du congrès, avec en particulier des élèves et des enseignants.

Jean-Pierre Bourguignon :

L'objectif de ce film est d'être accessible au grand public. On a essayé de créer des situations qui fassent qu'on ne soit pas mal à l'aise de ne pas tout comprendre. A vous de dire si on a réussi …

La dimension un peu poétique du film était pour nous une façon de nous placer par rapport au public, de lui donner l'idée que, en le regardant, on peut aussi tout simplement rêver. On n'est pas obligé d'en comprendre chaque détail, et on peut se laisser prendre par une sorte d'atmosphère, de mode de communication, et de relation entre les gens. Romain Weingarten, le berger, se présente dans le film comme quelqu'un qui ne comprend pas tout. Son rôle est donc de rendre les choses plus acceptables que si on était en train de faire une leçon où il faut tout comprendre. C'est sur ce mode que nous avons fonctionné, avec l'ambition de nous adresser à un public très large.

Par ailleurs, nous avons aussi l'envie (mais pas forcément l'argent nécessaire) de faire un film plus long, qui serait un film avec une visée plus pédagogique. Si vous avez déjà fait du cinéma dans votre vie, vous savez que quand on a *monté* un film, ce qui reste est infiniment plus petit que ce qu'on a *tourné*. En fait, nous avons plusieurs heures de bandes, et n'ont été montées que vingt-huit minutes trente. Notre ambition, c'est d'avoir un autre film (à partir des mêmes bandes) : un film qui soit didactique, pour un public radicalement différent, d'étudiants des premières années d'université ou de maîtrise, avec une visée beaucoup plus professionnelle, beaucoup plus technique.

Et une des questions que nous nous posons, et que nous posons aux spectateurs du film, c'est : *«est-ce qu'à votre avis il y a un intérêt à monter un tel film ?»*. Il serait probablement deux fois plus long, et passerait plus de temps sur des choses plus directement techniques, avec la volonté de donner assez d'informations pour qu'on puisse vraiment comprendre, voire apprendre. Mais cette fois, le but ne serait pas le grand public.

Question d'une enseignante :

Le film donne envie d'aller un petit peu plus loin… Alors si on n'est pas étudiant de maîtrise, mais élève de seconde, première, terminale, ou même avant, quel canal a-t-on pour comprendre un peu mieux ?

Jean-Pierre Bourguignon :

Ça c'est une très bonne question. Disons qu'il y a trois choses dedans, qui recouvrent des aspects différents.

Une première chose, qui m'importe beaucoup comme mathématicien, c'est le fait que dans ce film, on voit des mathématiques se créer pour répondre à des questions qui ne sont pas des questions mathématiques.

C'est l'idée que les mathématiques ne sont pas isolées dans leur coin, mais qu'elles se développent par stimulation venant d'ailleurs, que, lorsqu'on met à jour un concept mathématique, il peut se révéler pertinent pour faire autre chose. C'est une idée générale qui, à mon avis, peut être documentée indépendamment de ce film. C'est éventuellement une incitation pour un enseignant de mathématiques d'aller voir son collègue de physique ou son collègue de philosophie pour étudier cette dimension. J'ai déjà montré ce film dans un certain nombre de situations, avec des élèves. Et je dois dire que j'ai eu plus de propositions de collaboration de la part de professeurs de physique ou de philosophie que de mathématiciens. C'est, à mon avis, une piste qu'il est possible de poursuivre et qui a son intérêt parce qu'elle montre que les mathématiques ne sont pas seules. Ça, c'est le premier élément de réponse.

Deuxième élément de réponse, en ce qui concerne l'étude de l'espace des ellipses du plan, puisqu'on essaye d'aborder cette question dans le film, c'est une étude qui peut vraiment être faite. Nous n'avons pas produit de document pédagogique pour aider à faire cela mais c'est un document parfaitement productible, par exemple dans le cadre de MATh.en.JEANS.

Il s'agit de comprendre comment est fait l'espace des ellipses du plan. C'est un espace à trois dimensions. Quand on étudie la façon de se mouvoir sur une ellipse, comme on se meut dans le cadre de la mécanique céleste, la loi de parcours de l'ellipse est parfaitement définie par la **loi des aires** comme on dit. L'espace des mouvements elliptiques plans est alors un espace qui a quatre dimensions. Donc tant l'espace des ellipses du plan qui a trois dimensions que l'espace des mouvements elliptiques vérifiant la loi des aires qui a quatre dimensions sont des espaces qu'on peut faire explorer, dans lesquels on peut apprendre à se promener. On peut étudier leurs propriétés, et avec une sophistication mathématique relativement faible.

Par contre le troisième niveau de réponse, qui est en fait la vraie chose importante, c'est que ce dernier espace n'est pas simplement un espace dans lequel on peut se promener (même s'il a quatre dimensions), c'est un espace qui porte naturellement une autre géométrie que la géométrie euclidienne habituelle.

Et évidemment, la découverte de Lagrange n'était pas simplement la transposition du problème classique de la mécanique céleste dans cet espace des mouvements elliptiques (et donc un espace à quatre dimensions), mais la découverte que cet espace est structuré d'une certaine façon, et arrive naturellement équipé d'outils de mesure qui sont des outils inhabituels. Cette géométrie nouvelle, qu'on appelle la géométrie symplectique aujourd'hui, Lagrange ne lui donne pas de nom. Il construit des outils de calcul dans cet espace, il pressent qu'il y a une grande généralité dans sa construction, mais il le pressent seulement …

Faire sentir du doigt cette géométrie, c'est un petit peu plus difficile. En tant que mathématicien, si on reprend le point de vue d'un cours de maîtrise, c'est une chose qui ne pose pas de problème. Mais si on veut le redescendre au niveau de l'enseignement secondaire par exemple, c'est un plus difficile. Cela mérite vraiment qu'on élabore des documents pédagogiques. C'est une chose qu'on n'a pas faite, mais qui n'est pas impensable, et qui mériterait qu'on y réfléchisse.

Dans le même ordre d'idées, je pense à une expérience que j'ai eue avec des élèves d'un lycée de Massy. Ils avaient un atelier sur la géométrie hyperbolique dans le cadre de quelque chose qui ressemblait à MATh.en.JEANS, et qui n'était pas tout à fait MATh.en.JEANS ; ils devaient donc étudier une géométrie différente de la géométrie euclidienne, mais qui est encore une géométrie métrique où on mesure des distances. Et j'ai vu des élèves de première finalement parfaitement à même de maîtriser et de comprendre ce qui était sous-jacent à la géométrie hyperbolique. A condition de leur donner quelques documents, et ensuite de discuter avec eux.

Avec l'espace des mouvements elliptiques, le niveau de dépaysement est plus grand, les documents pédagogiques n'existent pas, mais à mon avis, c'est une sorte de défi qu'on peut essayer de relever.

Donc, il y a ces trois niveaux de réponse par rapport à une utilisation potentielle d'un prolongement de ce film.

J'ai commencé par la première, parce que je ne voudrais pas qu'elle passe à la trappe. Personnellement, bien que je sois mathématicien (ou plutôt parce que je suis mathématicien), ça me paraît très important que les mathématiques apparaissent comme un outil de connaissance qui n'est pas coupé du reste du monde.

Et si dans leur histoire, dans leur genèse, dans leur création, les mathématiques se sont développées dans l'abstraction, très souvent cela s'est fait pour répondre à des questions qui se posaient hors des mathématiques.

Question d'un élève :

Qui était Lagrange ?

Jean-Pierre Bourguignon :

Lagrange a vécu essentiellement au XVIII° siècle, mais aussi au début du XIX° siècle. C'est quelqu'un qui, à l'origine, était italien, et a passé à Turin une grande partie de sa vie — il y a un Institut Lagrange à l'université de Turin. Ensuite il est venu s'installer en France, et il a été professeur à l'Ecole Polytechnique. Le lien avec le Bicentenaire de l'Ecole Polytechnique se fait par ce biais : deux des principaux personnages du film, en tout cas les personnages pour lesquels j'ai voulu faire ce film, à savoir Lagrange et Poincaré ont été professeurs dans cette école.

L'écriture du nom de Lagrange varie : on trouve Lagrange en un seul mot, de la Grange en trois mots, ça dépend des impressions. C'est un Monsieur qui, dans sa vie de mathématicien, a fait des choses très diverses : de la mécanique céleste comme on le montre là, mais aussi de l'algèbre, de l'analyse, de la théorie des nombres. C'était probablement un des plus grands mathématiciens de la fin du XVIII° siècle et du début du XIX° siècle.

L'autre personnage, c'est Poincaré. Lui, a vécu sur la fin du XIX° siècle et le début du XX° siècle — il est mort en 1912. Poincaré a été un mathématicien assez universel, qui s'est aussi intéressé à la mécanique céleste : le livre auquel nous faisons allusion dans le film s'appelle les *Nouvelles méthodes de la mécanique céleste*. C'est un livre en trois volumes, qui garde une grande actualité.

C'est Poincaré qui a, en gros, créé la théorie des systèmes dynamiques (comme on l'appelle aujourd'hui). En fait il a créé énormément de notions mathématiques utilisées de nos jours. Je crois que son nom est un de ceux auxquels il y a le plus de notions attachées : il y en a au moins sept ou huit. Ici, c'est l'*application de premier retour* qui est évoquée, mais il y a aussi la caractéristique d'Euler-Poincaré, le groupe fondamental (qu'on appelle le groupe de Poincaré), etc.

Donc Poincaré était un créateur …

Question d’un enseignant :

C’est lui qui a posé le problème des trois corps célestes ?

Jean-Pierre Bourguignon :

Non. Le problème des trois corps célestes remonte beaucoup plus loin dans le temps. Il est le soubassement de la problématique présentée dans le film. Comme nous le disons, le problème des deux corps — le problème du soleil et d’une planète — est un problème qu’on résout complètement. Les lois de Kepler donnent tout ce qu’on veut apprendre sur ce problème, et Newton a donné une traduction mathématique de ce problème. Où les choses deviennent graves, et embêtantes, ou au contraire stimulantes (ça dépend du point de vue qu’on adopte), c’est que dès qu’on ajoute un troisième corps, il n’y a plus de solution mathématique exacte du problème.

Et donc pendant très longtemps, l’objet de tous les travaux depuis le début du XVIII° siècle — et Lagrange apporte là-dessus un certain nombre d’éléments nouveaux— c’était d’essayer de trouver quand-même des éléments de solutions pour le problème des trois corps, c’est-à-dire de comprendre comment le soleil et deux planètes se comportent, sachant qu’une des planètes influence l’autre et réciproquement.

Comme les masses des planètes sont très faibles à côté de celle du soleil, on s’est rendu compte très vite qu’on pouvait quand-même prédire des choses par une méthode dite « des perturbations », en négligeant un certain nombre de termes dans le calcul.

Mais on s’est de plus en plus posé la question : est-ce que finalement on aura une idée tout à fait exacte de ce qu’est le mouvement réel en rajoutant de plus en plus de termes correctifs ? C’est-à-dire, par ces méthodes perturbatives de plus en plus fines, est-ce que les termes correctifs deviennent réellement de plus en plus petits ?

En termes un peu plus savants, est-ce que la série des perturbations converge ?

Poincaré a mis le doigt sur une chose très ennuyeuse, c’est qu’en fait ce n’est pas vrai : il n’y a pas « sommation des perturbations », c’est-à-dire que ce qu’on *croyait* être des termes correctifs de plus en plus petits ne sont pas des termes de plus en plus petits ; que souvent les corrections qu’on rajoutait, si on allait assez loin, devenaient finalement pas négligeables du tout.

Donc ça supposait qu’on aborde le problème du mouvement des trois corps par des méthodes radicalement différentes — celles auxquelles on fait allusion dans le film — et de passer *de méthodes quantitatives* (qui étaient celles du calcul des perturbations) *à des méthodes qualitatives*, et du coup de s’intéresser à la dynamique ; on ne pouvait pas, spécialement quand on s’intéresse à des intervalles de temps extrêmement longs, des millions d’années par exemple, se limiter à avoir cette attitude de calcul parce que le calcul perturbatif donnerait des informations illusoires.

Il fallait arriver à des méthodes qualitatives, et un des apports de Poincaré a été de donner les éléments pour faire cette transposition, des méthodes de calculs à des méthodes beaucoup plus conceptuelles, plus abstraites, plus générales, qui ont donné naissance à la théorie des systèmes dynamiques.

Donc le problème des trois corps a été un défi fantastique pour les mathématiciens. Encore aujourd’hui, on sait un peu plus sur le problème des trois corps, mais on ne connaît pas la solution au sens où on connaît la solution du problème des deux corps.

Question d’un enseignant :

Vous avez dit un mot de la géométrie symplectique tout à l’heure … Je viens de lire un article dans la revue du CNRS qu’on nous a donnée [« Images des mathématiques 95 »] sur la géométrie symplectique aussi : kézako ?

Jean-Pierre Bourguignon :

D’abord le nom est un peu bizarre : il provient du mot grec qui signifie «complexe» — qui se dit symplectique.

C'est la partie la plus difficile du film : nous nous sommes battus à propos de ça ; on a tourné des heures sur la géométrie symplectique, et vous voyez qu'il n'en reste pas beaucoup. Nos « censeurs » sont passés par là.

Jean Brette :

On a dépensé beaucoup d'énergie. On ne s'est pas mutuellement battus.

Jean-Pierre Bourguignon :

Il est vrai que tous les deux nous étions à peu près d'accord mais nos collègues cinéastes, eux, trouvaient que nous exagérions …

Jean Brette :

Ce n'était pas une lutte entre nous. Simplement on a consacré beaucoup d'efforts à essayer de trouver des moyens cinématographiques de dire en quoi cette géométrie diffère de la géométrie euclidienne, et de donner au moins quelques aspects de cette géométrie.

Il se trouve que, pour des raisons diverses, il y a eu un vrai débat avec les réalisateurs. Ces séquences-là n'ont pas été montées dans le film définitif — dans le film court — probablement, même certainement, parce qu'ils trouvaient que c'était trop compliqué pour une large audience. Mais il est vrai qu'il est extrêmement difficile d'en donner des images. Pas seulement parce qu'on a affaire à un espace qui est déjà, même dans le cas le plus simple, à quatre dimensions : même si le film donne deux dimensions, plus une dynamique, ce qui en donne trois, il en manque encore une.

Jean-Pierre Bourguignon :

Pour donner une idée de cette géométrie symplectique, première chose : elle a la particularité de n'exister que dans des espaces ayant un nombre pair de dimensions. Elle n'existe tout simplement pas quand il y a un nombre impair de dimensions. Donc elle existe en dimension deux, quatre, six, huit, dix, etc.

Deuxième chose : alors qu'on est habitué dans un espace euclidien ordinaire à trois dimensions à ce que, dès qu'on se donne un plan, il y a une direction normale, ou à l'envers : dès qu'on se donne une droite, il y a un plan perpendiculaire, dans le cadre de la géométrie symplectique, ça ne se passe pas du tout comme ça. C'est une géométrie qui a l'effet suivant sur l'espace :

• à un vecteur on ne peut rien associer, rien de vraiment intéressant en termes élémentaires,

• par contre, dès qu'on prend deux vecteurs, on commence à avoir une notion intéressante : on est capable de calculer l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Cette géométrie s'appuie sur ce genre de constructions. Ça a l'air très faible, on a l'impression qu'on ne peut pas faire grand-chose avec ça. Mais on montre que, dans un espace à quatre dimensions par exemple, si on se donne un parallélogramme, donc deux vecteurs qui engendrent ce parallélogramme, on peut trouver, très naturellement, deux autres vecteurs qui engendrent un autre parallélogramme, et qui vont permettre d'exprimer à peu près tout ce que vous voulez savoir sur cette géométrie.

Donc ça veut dire que, dans un espace symplectique à quatre dimensions, si on privilégie un plan, alors cette géométrie vous permet de travailler avec beaucoup d'autres plans qui sont, d'une certaine façon, des plans complémentaires. Il n'y a pas unicité avec une notion de perpendicularité, mais il y a beaucoup de plans complémentaires qui permettent de travailler avec cette géométrie comme si on avait décomposé l'espace en somme de deux plans.

Alors pourquoi intervient-elle dans notre problème, cette géométrie symplectique ?

C'est qu'en fait, par sa nature même d'espace des mouvements elliptiques, cet espace à quatre dimensions arrive naturellement muni d'une telle géométrie. Il n'y a rien à faire, ça arrive tout seul, et c'est ça la découverte de

Lagrange : c'est que ça arrive tout seul. Il le définit, il montre que c'est ça, et que, pour calculer la dynamique, la façon dont les objets se meuvent dans cet espace, il suffit de connaître cette géométrie-là. Il n'y a pas du tout besoin de connaître de distance, il n'y a pas du tout besoin de faire des calculs de longueurs, ou de choses de ce genre-là, c'est cette géométrie qui détermine tout.

C'est, d'une certaine façon, le fait qu'on sache calculer l'aire des parallélogrammes qui permet de tout dire.

Ce qui est assez extraordinaire, c'est que Lagrange a vraiment compris ça, et il a compris ça après Poisson. Poisson avait fait les calculs à la main, et introduit des notations qui le mettaient sur cette piste, mais il n'avait pas compris le mécanisme fondamental. Il faisait un certain nombre de calculs, mais il ne comprenait pas ce qu'il était en train de faire. Lagrange, lui, a compris l'universalité de la méthode, pourquoi ça se passait comme ça, et l'objet de son article, qui est au cœur du film, c'est une présentation d'une luminosité extraordinaire de cette découverte. Alors chose étonnante — mais ce n'est pas étonnant quand on fait une grande découverte—, les gens de son époque n'ont rien vu, n'ont pas du tout compris ça. Il a des échanges avec Laplace, notamment, dans lesquels Laplace n'a absolument pas compris la portée de l'article de Lagrange.

En fait le premier qui a vraiment compris l'importance de ce qu'avait fait Lagrange, c'est Hamilton. Et celui qui a vraiment exploité à fond pour la Mécanique Céleste ce qu'a fait Lagrange, c'est Poincaré.

Le manuscrit de Lagrange, c'est 1808, Hamilton, c'est vers 1830, et Poincaré, c'est 1880 : il a donc fallu un laps de temps énorme avant qu'on assimile, qu'on comprenne la nature de ce qui avait été fait. Et Lagrange lui-même d'ailleurs n'a pas compris à quel point ce qu'il avait fait était général puisqu'il donne l'impression que ce qu'il a fait se passe dans un cadre "linéarisé", c'est-à-dire de perturbations infiniment petites, alors qu'en fait c'est vraiment une structure de portée universelle.

Il n'a pas vu du tout, par exemple — mais ce n'est pas étonnant — que ça ne servait pas qu'à expliquer des choses de la mécanique céleste, donc les mouvements d'objets très gros, mais que c'est la théorie mathématique indispensable pour comprendre la structure microscopique du monde. Quand on veut comprendre la mécanique quantique qui est la mécanique qui régit la physique des particules élémentaires introduite vers la fin des années 20, la géométrie la plus importante, c'est la géométrie symplectique ; ainsi, pour comprendre le monde de la physique quantique, la géométrie symplectique est indispensable.

Ce qui est fascinant, c'est de voir qu'on a découvert un petit bout de territoire comme ça, en regardant le mouvement des planètes, l'infiniment grand ; et quand on veut comprendre l'infiniment petit, c'est en fait les mêmes objets mathématiques qui apparaissent sous-jacents.

Question d'un élève :

Est-ce qu'il y a d'autres domaines des mathématiques qui puissent s'appliquer à notre univers à part les planètes, parce que c'est un domaine assez restreint, l'observation de l'univers …

Jean Brette :

Jean-Pierre vient déjà partiellement de répondre. Ces méthodes mathématiques qui sont apparues dans l'histoire des maths pour régler un problème de mécanique céleste — à savoir «est-ce que le grand axe de l'ellipse peut devenir arbitrairement grand ?» —, il se trouve que cet outil mathématique est aussi celui qui permet de décrire les particules élémentaires, dans une physique qui est très différente de la physique classique, et ça, cent trente ans après. Donc il y a déjà un élément de réponse très net.

Jean-Pierre Bourguignon :

On peut donner un autre exemple : les techniques modernes d'investigation du corps humain—par exemple le scanner—s'appuient sur une méthode mathématique tout à fait sophistiquée, qu'on appelle la transformation de Radon. Avec quelques images, prises par des impacts de rayons à travers le corps, on arrive à reconstruire des structures à trois dimensions. Et ça c'est une chose mathématiquement très élaborée en fait, qui ne provient pas d'une construction simple.

Comment marche un scanner ? On fait plusieurs radios, à partir d'un certain nombre de points de vue, mais un nombre *fini* de points de vue. Quelques uns. Et à partir de ces points de vue, on reconstruit quelque chose à trois dimensions.

Or qu'est-ce qu'une image obtenue par radiographie ? C'est un empilement : vous avez un rayon qui traverse, et suivant la nature de ce qu'il traverse, le rayon est plus ou moins absorbé. L'information que l'on récupère sur la plaque est une espèce de coefficient d'absorption dans une direction donnée, en fonction de la nature des tissus traversés ; on fait ça de plusieurs points de vue, et à partir de cette information, il s'agit de reconstituer une image à trois dimensions.

Reconstituer une forme à partir de sa projection, c'est un problème mathématique extrêmement difficile, et comme je viens de le dire, ce qu'on a n'est même pas tout à fait sa projection, mais plutôt, l'intégrale d'une densité, suivant quelques directions données. Faire cette reconstitution, c'est ce qu'on appelle faire la transformation de Radon — un mathématicien autrichien qui a vécu au début du siècle. Donc les outils mathématiques qu'on utilise là sont des outils qui ont été créés et développés sérieusement dans ce siècle. Ils n'existaient pas du tout au siècle dernier.

Voilà donc un exemple d'utilisation quotidienne de résultats mathématiques récents et sophistiqués dans un cadre bien défini, celui de la médecine.

Bien sûr, ça ne fait pas appel qu'à des mathématiques :

• il faut du rayonnement, donc il faut de la physique sophistiquée ;

• il faut de l'électronique, parce que évidemment tout ça se programme, et on le fait calculer à des machines ;

• il faut aussi une connaissance médicale, puisqu'il faut connaître les divers tissus que les rayons traversent pour ensuite interpréter l'image que l'on obtient.

Mais quand vous mettez tout ce faisceau de connaissances ensemble, vous arrivez à cette chose extraordinaire : grâce à l'information contenue dans une image scanner, on peut arriver à enlever les os, à isoler un organe. Vous avez dû voir des images de ce genre.

Et ça, ça utilise des mathématiques, qui sont des mathématiques récentes.

Un autre domaine où on constate le même phénomène est bien connu et pas si loin du précédent : c'est le traitement des images. Les images qu'on reçoit par satellite par exemple sont généralement pleines de parasites : elles viennent de loin, et le signal a rencontré beaucoup de choses sur son trajet. On veut donc les nettoyer de tout ce qui est « le bruit de fond », qui n'apporte pas d'information.

Il y a des méthodes mathématiques de traitement des images, pour arriver à reconnaître les domaines différentiant les différents objets les uns des autres, c'est-à-dire pour les déparasiter. Il y a tout un tas de techniques possibles. Les plus récentes sont développées depuis dix ou quinze ans, pas plus, comme la théorie des ondelettes.

Donc, des mathématiques à l'œuvre autour de nous, dans notre vie quotidienne, il y en a des sortes très différentes. Ce dont je viens de parler, contient essentiellement de l'analyse, mais aussi une certaine géométrie ; et des problèmes de discrétisation. Donc il y aussi du codage.

Les mathématiques à l'œuvre sont aussi bien de l'analyse, de la géométrie ou de l'algèbre. Il n'y a pas unicité du type de mathématiques qui se cachent dans les objets qui nous entourent.

Pour revenir au thème du film lui-même, la mécanique céleste a quand même, dans l'histoire de l'humanité, joué un rôle extraordinaire. Elle a été un défi à relever, une stimulation à élaborer des conceptions du monde, et aussi un enjeu religieux très considérable: elle pose tout à la fois beaucoup de questions :

• qu'est-ce que le monde dans lequel on vit ?

• comment est-il fait ?

• de quoi sont faits les objets qui nous entourent ?

• quel rôle joue-t-on par rapport à eux ?

• comment les comprend-on ?

Il est assez fabuleux de voir que Newton a compris ce qui se passe sur la Terre à partir de ce qui se passe dans l'univers. La loi fondamentale de la mécanique que Newton énonce dans le livre qu'on manipule dans le film, les *Principia*, il l'a comprise et élaborée essentiellement à partir des lois de Kepler, les lois qui expriment comment se comportent les planètes autour du soleil.

C'est à partir de la compréhension et de l'observation minutieuse de ces lois, y compris avec les progrès faits dans la précision des instruments de mesure, que Newton a pu énoncer la loi fondamentale de la mécanique. Ces lois générales sont appliquables à tout le monde qui nous entoure. Et ça a été le point de départ du développement de l'industrie ; il n'y aurait pas eu une généralisation aussi rapide de l'industrie (l'industrie mécanique en particulier) si on n'avait pas eu la loi fondamentale de la mécanique.

On a peut-être pris une certaine distance par rapport à la mécanique céleste aujourd'hui parce que les idées qui la sous-tendent sont devenues familières — la télévision nous apporte tous les jours des images de la Terre ou d'autres objets célestes —, mais elle a été la provocation, le défi nécessaire pour comprendre les choses qui se passaient sur la Terre.

Et ce rapprochement entre les deux n'a été possible que grâce à des penseurs comme Galilée, qui a été le premier à critiquer la théorie d'Aristote.

La théorie d'Aristote consistait à dire : ce qui se passe dans le ciel, ça se passe dans le ciel, mais, ce qui se passe sur la Terre, c'est ce qui se passe sur la Terre ; il y a deux mondes complètement différents, régis par des lois différentes. Il y a les graves et les légers ; les graves, par nature, doivent venir sur la Terre, donc tomber, et les légers vivent ailleurs.

Et donc l'affirmation de Galilée — les mêmes lois régissent les deux mondes, et donc il y a universalité des lois de la physique — est sur le plan de la pensée un pas absolument extraordinaire.

Aujourd'hui, il est devenu de bon ton dans certains cercles de critiquer la pensée de Galilée parce qu'en même temps il aurait amené une espèce de « terrorisme intellectuel sur l'universalité de la science ».

Je dois dire que des affirmations de ce genre me font sourire parce que la contribution de Galilée représente un tel progrès dans la compréhension du monde qui nous entoure que ce pas extraordinaire change nécessairement la façon dont on pense après qu'il soit franchi : un nouveau monde s'ouvre avec de nouveaux défis.

Et ce n'est pas parce qu'on comprend qu'il y a universalité des lois de la physique que, du coup, on devient une espèce de tyran qui mérite qu'on le brûle.

A son époque, Galilée a déjà failli être brûlé parce qu'on considérait qu'il transgressait les « connaissances », les affirmations religieuses, et cela le rendait dangereux.

Question d'un élève :

J'aimerais comprendre comment on peut travailler dans un espace à quatre dimensions alors qu'on ne peut pas se le représenter.

Jean Brette :

Je ne suis pas tout à fait sûr qu'on ne peut pas se le représenter. Il faudrait se poser la question de ce qu'est une représentation. Quand on écrit qu'un espace est à quatre dimensions, c'est déjà une représentation. Alors, on peut avoir recours à des symboliques. Ce que je peux dire, c'est que je ne connais personne qui en a une représentation visuelle très nette. Il existe des films qui sont sensés montrer en projection en deux dimensions plus le mouvement ce qui se passe dans un espace à quatre dimensions : c'est extrêmement joli mais extrêmement difficile à avaler pour une personne non prévenue. Donc cette représentation-là n'est certainement pas la plus adéquate, encore que des gens comme Thurston ou autres ont sans doute des intuitions très particulières, des représentations qui sont venues de la familiarité qu'ils ont avec ce système.

Maintenant si on choisit une représentation purement symbolique, un cercle par exemple dans le plan c'est $x^2 + y^2 = 1$; une sphère dans l'espace c'est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Un jour ou l'autre il faut bien qu'il y ait un mathématicien qui se dise : si je considère $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1$, ça doit représenter une sphère dans un espace de dimension supérieure ; et qui regarde si les méthodes qu'on connaissait dans notre espace à nous peuvent être transportées directement avec armes et bagages ou s'il apparaît des difficultés supplémentaires, auquel cas il faudrait les comprendre. Et il y a des difficultés supplémentaires. C'est un mode de représentation. Quand on dit que l'équation d'une parabole est $y = a\,x^2 + b\,x + c$, on peut aussi bien représenter cette parabole par un point, qui aurait comme coordonnées (a, b, c) dans un espace à trois dimensions ; auquel cas ce point lui-même représente toujours la parabole, mais il ne représente que les coefficients, d'une certaine façon. Si on veut accéder à la forme de la parabole, il faudra retranscrire ça dans une autre représentation. C'est un peu ce qu'on fait dans le film, avec les ellipses. Je ne sais pas si ça répond bien à la question, mais il y a des espaces de dimension infinie qui sont des espaces du quotidien. L'espace des sons par exemple : on décompose un son en harmoniques ; l'oreille ne les entend pas tous, mais il n'y a pas de raison mathématique de ne pas considérer qu'un son se décompose effectivement sur une infinité d'harmoniques.

Pierre Duchet :

Puisque j'ai le micro, j'ajoute un petit mot là-dessus. On dit toujours qu'il est difficile de se représenter la quatrième dimension. Mais je crois que c'est le même ordre de difficulté qu'il y a à s'imaginer plat. Imaginez-vous plats, et vivant sur un monde plat ; vous faites finalement un peu la même démarche mathématique, parce que si vous êtes plats, vous êtes peut-être courbes.

Et des êtres plats courbes, vous en avez déjà une représentation, en regardant un ballon de football par exemple.

Jean Brette :

Ne dis pas plat, dis : sans épaisseur.

Pierre Duchet :

Voilà, sans épaisseur, oui. Encore une intervention ? Non ?

Merci beaucoup à Jean Brette et à Jean-Pierre Bourguignon. [Applaudissements].

Alors comme l'horaire initial le prévoyait, nous enchaînons avec un sujet qui a tout à fait à voir avec l'espace : il s'agit d'une courbe à tracer à partir de quelque chose qui s'appelle une équation différentielle.

[NDLC : lire l'article de la page 247]

LA NOUVELLE ÉTOILE DU BERGER

Un film de

Jean-Pierre Bourguignon, François Tisseyre, Claire Weingarten

avec la participation de

Bruno Morando / Bureau des Longitudes, Jean-Pierre Bourguignon / Ecole Polytechnique, IHÉS, Jean Brette / Palais de la découverte, Huguette Conessa, François Laporte / CNES

Un satellite artificiel traverse le ciel étoilé.

A sa fenêtre, un écrivain médite et s'interroge sur la présence de ce nouveau corps céleste dans le ballet universel. Il s'en confie à son ami mathématicien, qui va rassembler pour lui de nouveaux éléments de connaissance et de réflexion.

Visites chez l'Astronome, le Mathématicien, l'Ingénieur. Voyage à travers l'histoire des sciences, où, du géocentrisme à l'héliocentrisme, le système des planètes a inspiré tant de représentations idéalisées, où les mathématiques ont joué un rôle essentiel. Avec Ptolémée, Copernic, Tycho Brahé, Kepler, Newton, autant de découvertes, de révolutions, de nouveaux mouvements de la pensée.

Le film insiste sur les apports de Lagrange, à l'origine d'importants développements mathématiques, et propose au spectateur de vivre le passage de notre espace à 3 dimensions à “l'espace des mouvements elliptiques”.

Il souligne également le rôle de Poincaré, dont les travaux sont encore aujourd'hui d'une grande actualité.

Il s'agit surtout de donner une vue en perspective et de faire percevoir le mouvement des idées, dans lequel les mathématiques montrent qu'elles oscillent, par nature, entre l'utile et l'inutile, quitte à révéler, quelque jour peut-être, l'adéquation d'un modèle ou la découverte d'un champ d'application.

Auteur scientifique : *Jean-Pierre Bourguignon / Ecole Polytechnique, IHÉS*
Scénario, réalisation : *François Tisseyre, Claire Weingarten / Atelier Ecoutez Voir*
Texte : *Romain Weingarten*
Production : *Ecole Polytechnique - CNRS Audiovisuel - Imagiciel - 1995*
Versions : *Français / Anglais - 28 mn - SECAM / PAL*

BON DE COMANDE

Film “La nouvelle étoile du berger”

Nom/Organisme ....

Adresse ....

....

P.U. TTC Nbre Ex. Total TTC

Vidéocassette : “La nouvelle étoile du berger” .... 220 F ....

Format : VHS Standard : ◊ SECAM ◊ PAL
Langue : ◊ Français ◊ Anglais

à adresser avec votre règlement au :

CNRS Audiovisuel • 1, place Aristide Briand • 92195 Meudon Cedex

Tél : (1) 45 07 56 86 • Fax : (1) 45 07 58 60