formes philippines

ou

découpages isométriques

par M. Olivier Bruyat, DEUG A1, **Université de Marseille-Luminy**

enseignant : M. Laurent Beddou.

chercheurs : MM. Pierre Arnoux, Christian Mauduit.

coordinateur de l'article : M. Laurent Beddou

compte-rendu de parrainage :

Comment découper une figure en deux figures superposables ? Il a démontré qu'on ne peut découper un triangle que s'il a un axe de symétrie. Pour une figure quelconque, on peut la découper si elle a des axes ou un centre de symétrie.

G — Formes philippines. 18

Une forme plane qui est symétrique est, évidemment, décomposable en deux surfaces égales et superposables.

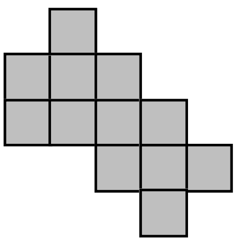
Existe-t-il des formes sans symétrie avec la même propriété ? Comment les reconnaître ?

résumé : **Formes philippines**

Certaines formes planes peuvent être divisées en deux parties géométriquement égales (= on peut les superposer exactement). On peut alors "faire philippine …"

Quelles sont ces formes philippines, comment les reconnaître ?

Que pensez-vous de celle-ci ?



(Jeu concours n°18, Pierre Tougne, in *Pour La Science* n°218, déc. 1995)

Sujet.

Comment trouver une ligne qui découpera une figure quelconque en deux parties superposables, directement ou en retournant l'une des deux ?

Limites données au sujet :

Il est important de préciser de quel type de figure il s'agit.

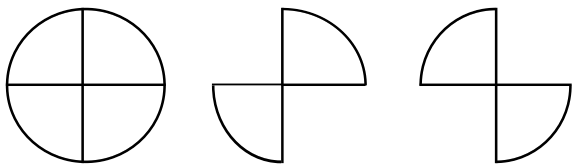
Je me suis contenté de **figures** qu'il est possible d'obtenir à partir d'une feuille et d'une paire de ciseaux.

On m'a fait remarquer qu'il existe certains "monstres" qui hantent l'univers mathématique et que l'on appelle figures (je pense notamment aux fractales).

Face à elles, il est nécessaire de se demander ce qu'est un découpage. Et je resterai très simple :

un découpage s'obtient avec le morceau de papier précédent et une paire de ciseaux quelconque, de telle façon qu'une fois le découpage fini on obtienne deux morceaux de papier jumeaux. (Il faudrait définir une autre façon de découper pour des figures moins intuitives.)

De même, j'ai appelé **ligne** un trait partant d'un bord pour aller vers l'autre sans se croiser. En effet on pourrait avoir envie de découper un cercle comme suit :

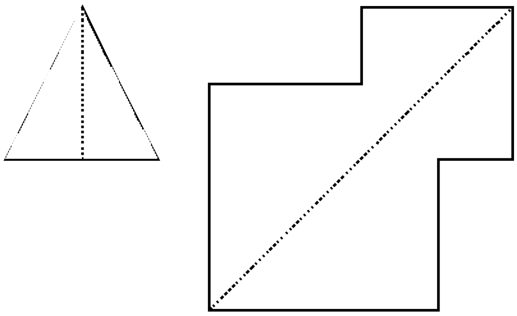


mais si les deux morceaux obtenus sont bien jumeaux dans l'absolu, un peu de scotch serait nécessaire en pratique ; mais ce type de matériel n'est pas signalé dans les hypothèses.

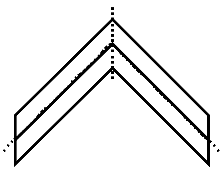
Figure possédant un axe de symétrie.

C’est un cas où le découpage est évident. On a alors deux parties isométriques au prix d’un découpage aisé à réaliser.

exemples :



On pourrait penser qu’une figure possédant un axe de symétrie n’admet pas d’autre découpage, il suffit d’observer un triangle équilatéral pour se convaincre du contraire. Je ne sais pas dire, pour une figure possédant un axe de symétrie, quels autres découpages elle admet. Car un découpage selon l’axe de symétrie n’est pas toujours la seule façon de s’y prendre :



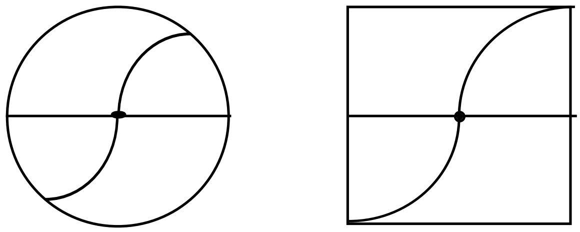
Voici un exemple avec deux découpages : l'un selon l'axe de symétrie, l'autre non.]

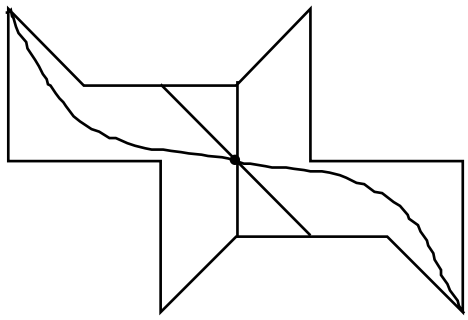
Figures possédant un centre de symétrie.

C’est un autre cas évident. En effet, on prend le centre de symétrie comme centre d’une rotation de 180°. On construit une ligne partant de la périphérie jusqu’au centre, puis son symétrique selon la rotation que nous avons définie.

Si cette construction ne sépare la figure qu’en deux parties, alors elles sont isométriques et nous avons obtenu un découpage.

Exemples :

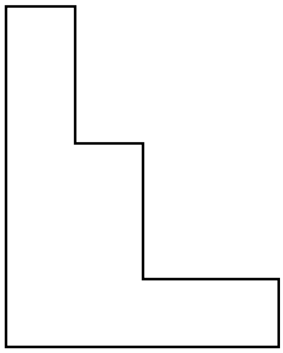


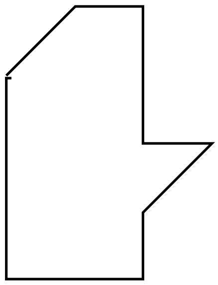


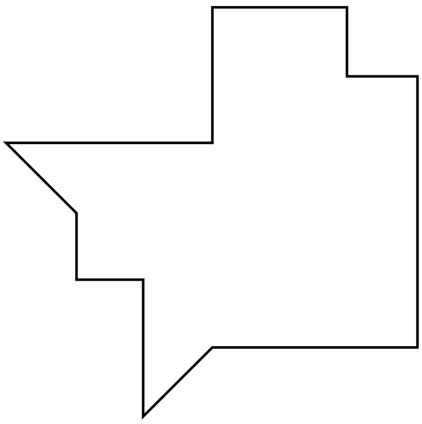
Je constate qu’il existe pour ces figures une infinité de découpages. Par contre, il m’est impossible de préciser si ces types de découpages sont les seuls. Existe-t-il une figure avec un découpage ne passant pas par le centre de symétrie ? Si non, pourquoi ?

Figures ne possédant ni axe, ni centre de symétrie.

Pensez-vous qu'une figure ne possédant ni axe ni centre de symétrie soit découpable ? Pour aider un peu vos méditations, je vous propose ces quelques figures :







(Si elles ont un découpage, vous le trouverez en fin d'article.)

Je dois faire trois remarques :

• Je ne me suis intéressé qu'aux **polygones**. Les figures quelconques posent un problème plus difficile pour des raisons évidentes, ne serait-ce que pour vérifier que le découpage suspecté est valable. Une figure absolument quelconque est difficile à reproduire, il est possible d'utiliser l'aide d'un ordinateur.

• Il est possible de superposer les deux parties par un jeu de rotation, translation et symétrie. Donc, trouver un découpage revient à trouver la bonne transformation. Malheureusement, cela reste quasi impraticable à ma connaissance face à une figure nouvelle. Par contre, cela donne une excellente méthode pour construire des "colles" en partant d'une figure, la dupliquant, puis en cherchant un recollage astucieux. On peut aussi y voir une définition d'un découpage. (Mais celle-ci est plus étendue que celle de départ car il faut accepter le découpage du cercle présenté en première page). C'est un élargissement du sujet très intéressant et qui prend l'intuition en défaut, notamment si on s'occupe d'espace à trois dimensions.

• Là encore, je suis dans l'incapacité de connaître l'unicité d'un découpage … et dans l'obligation d'avouer mon impuissance à découvrir un critère général d'existence d'un découpage pour les polygones quelconques.

Polygones convexes.

Jusqu'à présent nous avons vu à quel point il est difficile de présager l'existence d'un découpage, sans parler de son unicité.

Il existe pourtant un cas où il m'est possible de conclure : examinons les polygones convexes (*i.e.* polygones dont les angles sont tous inférieurs à 180°) possédant des angles tous différents.

Théorème :

Les polygones convexes dont les angles sont tous différents n'admettent pas de découpage.

démonstration :

• Examinons d'abord le cas des **triangles** et des **quadrilatères** quelconques. Dans ce cas avoir des angles tous différents implique avoir des côtés tous différents. Donc il existera toujours au moins deux côtés n'appartenant pas à la même figure qui ne se superposeront pas quelle que soit la superposition envisagée.

• Pour les polygones de nombre d'angles supérieur je vous propose d'envisager plusieurs types de découpage et de mener un raisonnement par l'absurde :

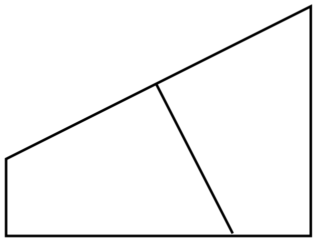
1) Si le découpage suit une courbe, nous serons obligés de superposer au moins deux angles de la figure. Or, par hypothèse, ils sont tous différents, la superposition est donc impossible.

2) Si le découpage suit une droite, pour les même raisons que précédemment il faudra superposer deux angles différents.

3) Si le découpage suit une ligne brisée, alors il comprendra des angles supérieurs à 180°. Elle devra donc se compenser, c'est-à-dire qu'aucun côté de la figure ne peut se superposer à elle sauf elle-même et il sera nécessaire de superposer deux angles différents.

Nous voici parvenus à bout des polygones convexes possédant des angles tous différents.

J'ai été tenté de tirer les mêmes conclusions pour les polygones convexes avec des côtés tous différents. Mais regardez le contre-exemple suivant :

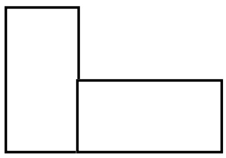


Tous ses côtés sont différents mais il possède deux angles égaux (droits) et deux angles complémentaires.

Pourtant il existe un découpage … Les angles donneraient un critère plus contraignant que les côtés.

Encore **deux remarques** concernant les polygones convexes :

1) si nous considérons un polygone convexe possédant un nombre de côtés pair, le découpage devra soit relier deux angles opposés, soit deux côtés opposés afin d'obtenir le même nombre de côtés dans chaque partie. Il est impossible de découper d'un angle vers un côté. Par contre si le polygone n'est pas convexe ceci n'est plus vrai. En effet la figure suivante possède un nombre pair de côtés, n'est pas convexe, ne possède ni axe, ni centre de symétrie, pourtant elle admet un découpage.



2) si le nombre de côtés est impair, pour les mêmes raisons, le découpage devra relier un côté et l'angle opposé. Je n'ai pas trouvé de contre-exemple dans le cas de polygones non convexes, mais ce sujet m'a appris qu'il ne fallait jurer de rien.

Une autre façon de le dire est :

Théorème :

Quelque soit la parité du nombre d'angles de la figure de départ, après le découpage, le nombre total d'angles est pair.

Il faudrait aussi se pencher sur le problème des invariants. Quels sont les côtés qui ne changent pas ? Y a-t-il un moyen pour calculer le nombre d'angles final des figures obtenues ? Et déjà, on peut remarquer que les figures possédant un centre de symétrie pourront avoir un nombre illimité d'angles car on peut en créer autant que l'on veut lors du découpage.

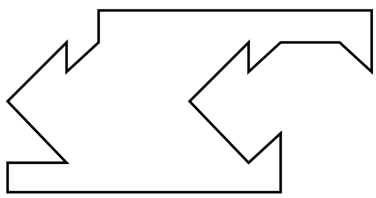
Derniers mots.

Théorème :

Dans un polygone les deux sommets les plus éloignés appartiendront à deux jumeaux différents, ou au deux en même temps (*i.e.* le découpage passe par ces deux points). [NDLR : on suppose qu'il n'y a qu'**un** couple de points qui réalise la plus grande distance.]

Démonstration : les deux points sont séparés par la plus grande distance existante dans la figure. Si un jumeau possède ces deux points alors cette distance ne pourra pas se retrouver dans l'autre et il ne seront pas superposables, à moins que le découpage ne passe par ces deux points. Ce découpage sera alors soit un axe de symétrie ou passera par le centre de symétrie, comme décrit précédemment.

Malheureusement, cela ne donne pas beaucoup d'indices quant à l'existence d'un découpage et sa forme éventuelle. Imaginez-vous devant la figure suivante :

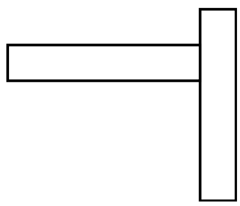


Les deux sommets les plus éloignés se trouvent bien sur deux parties différentes. Mais avouez que vous restez désarmé pour trouver le découpage. [Il se trouve, comme d'habitude, reporté un peu plus loin.]

Avec ce théorème viennent quelques méthodes pratiques qui nécessiteraient d'être formalisées. Je ne livre ici que les idées intuitives.

Tout d'abord on peut essayer d'améliorer cela en prenant les deux sommets les plus éloignés, puis, en éliminant ceux-ci, de chercher encore les points les plus éloignés, etc … Dans le cas de polygones convexes cette méthode semble marcher et permet de savoir quels points seront dans la même figure, un problème se pose pour les deux derniers car le découpage peut très bien les traverser. Le désavantage de cette méthode est que l'on ne sait pas quels points rassembler. Cela permet dans un couple de points de savoir qu'ils seront dans deux figures différentes ; par contre en regardant la totalité des sommets on ne peut pas dire lesquels sont ensemble. Vous n'avez qu'à prendre une figure inconnue et appliquer cette méthode pour vous en rendre compte.

On peut essayer d'imaginer une autre amélioration : on prend les deux sommets les plus éloignés. On s'en fixe un, puis on cherche le deuxième plus éloigné, etc … jusqu'à ce que la moitié des sommets soit éliminée. Là encore, dans le cas des polygones convexes cela semble marcher. Mais en examinant le polygone non convexe suivant :



si vous fixez le point en bas à droite, vous constaterez qu'à la troisième et quatrième itération vous excluez les sommets les plus hauts qui appartiennent au même morceau que le point fixé.

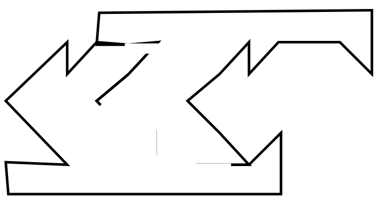
On peut aussi signaler une méthode plus acrobatique qui consiste à diviser le polygone en sous-polygones et à appliquer les méthodes précédentes. Le problème est de bien choisir les sous-polygones. Le découpage passera certainement par plusieurs sous-polygones différents, mais cela donnera toujours une idée de la région où le chercher.

Ces trois méthodes semblent peu efficace, mais peut-être pourrez-vous les améliorer ?

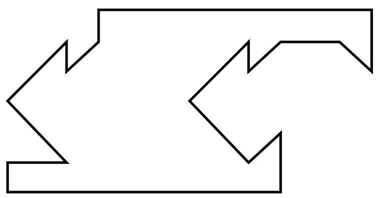
Il ne me reste plus qu’à vous signaler deux choses :

• Tout d’abord que ce sujet a été inspiré par un article du numéro 644 (mai 1971) de Science & Vie, qui signale que, pour un certain type de figure, il existe une méthode précise pour retrouver le découpage. Mais je n’ai pas réussi à retrouver leurs résultats (ou alors à mon insu).

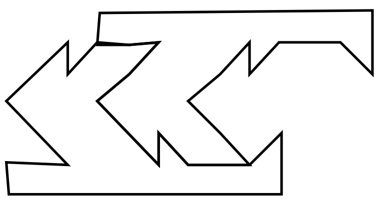
• Ensuite, je commençais cet article en écrivant que l’emploi d’ordinateur semble utile dans l’étude de figures quelconques. Je vous propose l’exemple suivant :



cette figure, qui semble bien compliquée, a été obtenue en lissant la figure déjà bien connue :



Si on lisse cette même figure avec son découpage, on obtient :

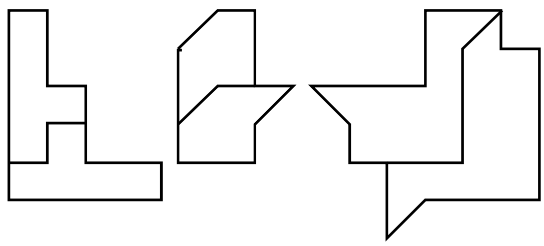


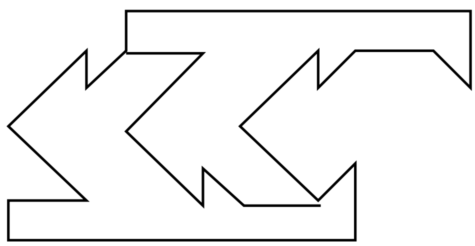
qui semble rester un découpage. Il serait alors possible d’approximer des figures quelconques par des polygones conservant leurs caractéristiques générales. Mais il faudrait déterminer à partir de quel degré d’imprécision une ligne devient un découpage.

En effet en regardant bien, les deux parties ne sont pas absolument superposables, mais si on se place suffisamment loin de la figure notre œil ne voit plus les imperfections, et nous avons une bonne idée du découpage, en travaillant encore un peu on peut le construire. Cela nécessite toutefois de transformer la figure. Notre figure de départ n’admet toujours pas de découpage, mais nous en avons une autre lui ressemblant qui a un découpage. C’est encore une façon de construire des “colles” sans trop se fatiguer. Ou bien de chercher des découpages en cherchant un polygone qui une fois lissé ressemblerait à la figure quelconque afin d’en simplifier l’étude, au moins d’un point de vue pratique, pour la recherche sur papier. Mais pour des figures vraiment quelconques et tarabiscotées (une de celles auxquelles on ne se frotte qu’avec un sourire de défi à faire pâlir un mousquetaire, et une dose de temps libre et de courage à rendre jaloux un miniaturiste) la simplification risque d’être aussi compliquée que l’original. Il est même possible que la figure soit inaccessible à l’ordinateur.

L’idéal serait de terminer l’étude des polygones et d’envisager un théorème de passage à la limite.

Je vous avais promis quelques découpages, eh bien les voici :





épilogue.

« Enfin je me dois de vous remercier d’avoir monté une telle initiative, je me suis beaucoup amusé tant dans la recherche du sujet que dans ce “congrès” à Paris. »