

mesures de surfaces

par M. Théophile Lumineau, élève de 1^oS du lycée Saint-Exupéry de Mantes la Jolie (78) et M. Abdallah Berkouki, M. Adib Bahlouli, élèves du lycée Jean Rostand de Mantes la Jolie (78)

enseignants :
MM. Régize Noui, Jean-Pierre Vallon

chercheur :
M. Laurent Mazliak

coordination article : Lumineau Théophile

Compte-rendu de parrainage :

Comment mesurer l'aire d'une surface délimitée par une courbe ? Cela me semble complexe pour mon niveau de 5^e, j'avoue que je comprends mieux avec des chiffres que des lettres. Je ne comprends pas très bien le cas de la parabole. Cela ne m'a pas trop plu car je n'ai pas très bien compris.

Mais j'essaierai de comprendre. J'ai mieux compris la méthode avec les rectangles.

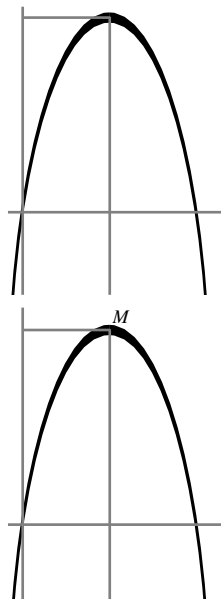
An— Mesure d'aires : surfaces limitées par une courbe. 20

Comment mesurer une surface limitée par une courbe ? En approchant la surface par des rectangles ? Dans quel sens les mettre ? Que donne ce procédé pour les figures classiques : carré, triangle, disque ...

.....
[NDLR : ci-après, quelques éléments sur cet exposé, réécrits à partir des notes fournies par les élèves.]
.....

Il est usuel, pour un mathématicien, d'avancer vers un objet sans être sûr qu'il existe vraiment. Ici, nous ne savons pas au départ définir l'aire que nous cherchons mais nous développons un moyen de calcul qui, si la notion d'aire était définie, nous permettrait de la trouver : cela permettra, finalement, une définition précise de l'aire cherchée.

Cas particulier : une parabole.



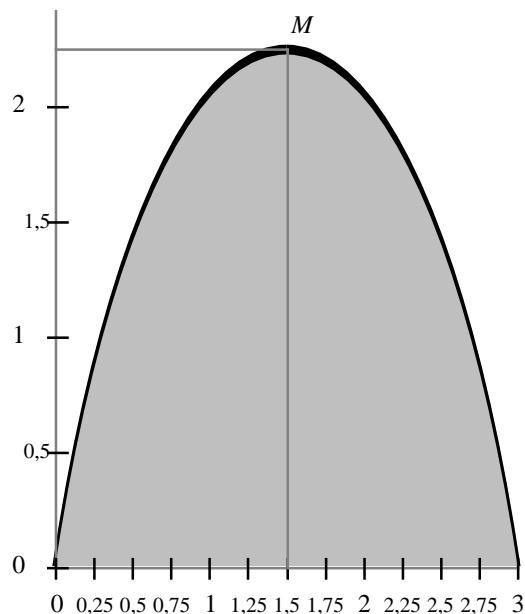
Calcul de l'aire d'une parabole délimitée par une droite horizontale (axe des abscisses) :

Une parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point M (l'extremum) ; aussi peut-on décomposer l'aire en deux parties égales.

exemple : soit la parabole de fonction :

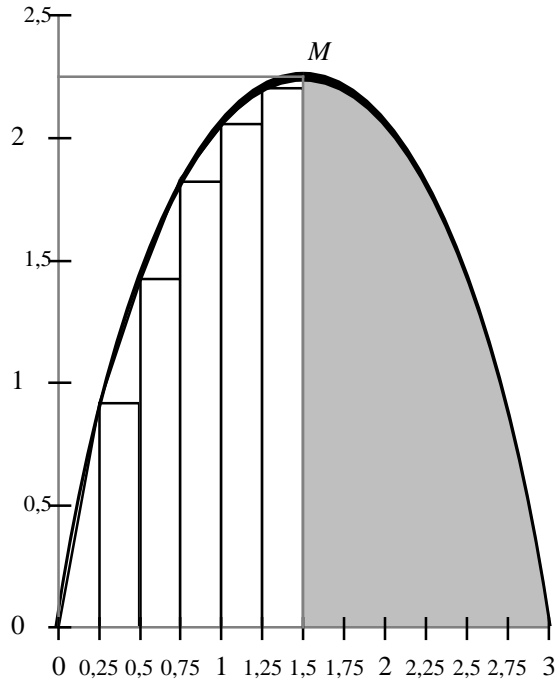
$$F(x) = -x^2 + 3x.$$

L'aire cherchée correspond aux valeurs de x dans [0, 3].



Aire approchée.

Décomposition de la surface [approchée] en des rectangles (d'aire $L \times l$) et des triangles (d'aire $(1/2) \times b \times h$) :



$$\begin{aligned}
 Ap(h) = & 2 \left((1/2) \times h \times Y_1 \quad [\text{triangle}] \right. \\
 & + h \times Y_1 \quad [\text{rectangle}] \\
 & + (1/2) \times h \times (Y_2 - Y_1) \quad [\text{triangle}] \\
 & + h \times Y_2 \quad [\text{rectangle}] \\
 & + (1/2) \times h \times (Y_3 - Y_2) \quad [\text{triangle}] \\
 & + \dots \\
 & + h \times Y_f \quad [\text{rectangle}] \\
 & \left. + (1/2) \times h \times (Y_f - Y_{f-1}) \quad [\text{triangle}] \right)
 \end{aligned}$$

$$Ap(h) = 2 \left((1/2) \times h \times Y_f + h \times [Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{f-1}] \right)$$

$$Ap(h) = h (Y_f + 2 \times [Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{f-1}])$$

[NDLR : il est essentiel, pour ce calcul, que chaque différence $Y_n - Y_{n-1}$ soit positive, autrement dit : que la fonction F soit croissante.]

applications numériques :

pour un pas $h = 0,25$, $Ap(h) = 4,468$

pour un pas $h = 0,125$, $Ap(h) = 4,492$

pour un pas $h = 0,0625$, $Ap(h) = 4,498$

Le calcul d'aire s'effectue dans un intervalle I compris entre une abscisse de départ, X_0 , et une abscisse de fin, X_f : $I = [X_d, X_f]$ (dans l'exemple précédent, on avait : $I = [0, 3]$, $X_0 = 0$, $X_f = 3$).

On décompose I en intervalles plus petits, de longueur régulière, appelée « le pas », noté h . On affecte à chaque n l'abscisse X_n correspondant à nh ; à chaque abscisse X_n correspond une ordonnée Y_n ; ainsi :

$$\begin{aligned}
 X_0 &= 0 \\
 X_1 &= h \\
 X_2 &= 2h \\
 &\dots \\
 X_f &= fh = 1,5
 \end{aligned}$$

Dans notre exemple, on a décomposé la surface en deux parties égales. L'aire approchée est alors :

$Ap(h) = 2$ (somme des aires des rectangles et des triangles qui apparaissent sur le dessin)

[NDLR : le calcul effectué devient ainsi de plus en plus précis. Plus le pas choisi diminue, plus le nombre de décimales ne changeant pas augmente. On peut donc **définir** l'aire comme étant le nombre unique qui est déterminé par ces décimales.

Symboliquement :

$$\text{Aire} = \lim_{h \rightarrow 0} Ap(h).$$

Généralisation et amélioration de la méthode.

Pour calculer une surface délimitée par une courbe, on la décompose en plusieurs espaces : on étudie au préalable le sens de variation de la fonction que la courbe représente, les points où cette courbe coupe l'axe des abscisses, les extremums ; cela permet d'avoir uniquement un extremum et un sens de variation par espace.

On adapte le calcul précédent à chaque cas : fonction croissante et aire au dessous, fonction décroissante et aire au dessous, fonction décroissante et aire au dessus, fonction croissante et aire au dessus.

[NDLR : sous certaines conditions, qu'il s'agirait de préciser, le phénomène observé ci-dessus (convergence des calculs approchés vers une valeur limite) se produit et permet donc de **définir** la mesure de l'aire cherchée. On notera que parmi les propriétés utilisées (et qui pourraient être prises pour axiomes $\forall \epsilon$) on a :

(a) Deux figures géométriquement égales ont même aire.

(b) Si $A \subset B$ alors

$$\text{aire}(A) \leq \text{aire}(B)$$

(c) Si A et B sont disjoints, ou, plus généralement, si $\text{aire}(A \cap B) = 0$, alors

$$\text{aire}(A \cup B) = \text{aire}(A) + \text{aire}(B).$$

Une approche semblable a été réalisée pour les volumes (actes de MATH.en.JEANS — 1994, p. 59 — **Longueurs, aires, volumes : le tore** — voir pages 315 à 318).

La mise au point des notions d'aire et de volume, notamment par cette démarche "axiomatique", constitue la fondation même de la **théorie de la mesure**, de l'**intégration** et des **probabilités** (voir à ce propos l'article p. 151 — **Modélisation du hasard**).]