pavage d'un échiquier abîmé par des dominos

par M. Andreï Gagarine (recherche effectuée durant huit semaines par Andreï Gagarine et douze autres étudiants de l'**Université Joseph Fourier (Grenoble I)**, DEA de Recherche Opérationnelle, Option "Structures combinatoires, et méthodologie de la recherche"), Laboratoire LEIBNIZ, ENSIMAG, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

enseignants et chercheurs :
MM. Pierre Duchet, Charles Payan

coordination article : (Pierre Duchet pour Andreï Gagarine)

compte-rendu de parrainage :

Un chercheur [un étudiant] *de l'Université de Grenoble a travaillé sur le pavage d'échiquiers abîmés par des dominos et leur formalisation par graphes. Il a démontré que l'on pouvait paver un échiquier si le nombre de cases est pair et s'il y a autant de cases blanches enlevées que de cases noires enlevées.*

C — Comment, avec des dominos, paver des échiquiers abîmés ? 27

Un échiquier abîmé (= où certaines cases manquent) peut-il être couvert avec des dominos (un domino couvre exactement deux cases) ? Peut-il être parcouru par un cavalier qui ne repasserait jamais au même endroit ? Avec combien d'allumettes peut-on le dessiner (4 allumettes bordent une case) ?

Des questions similaires se posent aux voyageurs de commerce, aux organisateurs d'emploi du temps, aux fabriquants industriels, et… aux mathématiciens, qui tentent de trouver les combinaisons les plus économiques possibles.

Introduction.

Un échiquier 8×8 auquel on enlève deux cases diagonalement opposées semble difficile à paver avec des dominos (un domino couvre exactement deux cases). Qu'en est-il exactement ? Plus généralement comment faire pour paver avec des dominos des morceaux d'échiquiers ?

Résumé.

Un **polymino** P est un ensemble fini de carrés unités du plan que l'on peut assimiler à un morceau d'échiquier. Un **domino** D est formé de deux cases de l'échiquier collées ensemble par un des leurs côtés. On s'intéresse au pavage d'un polymino P par des dominos.

Il est facile de voir que pour qu'un polymino P soit pavable par des dominos il est nécessaire que son nombre de cases soit pair et que le nombre de carrés "blancs" soit égal au nombre de carrés "noirs" dans une bicoloration de P "en damier".

Nous regardons le pavage par des dominos d'un polymino P rectangulaire sans case enlevée, avec une et deux cases enlevées. On dit que P est pair si il contient initialement un nombre pair de carrés et impair sinon.

Nous montrons que :

(*i*) P sans case enlevée est pavable si et seulement si P est pair ;

(*ii*) P impair privé d'une case est pavable si et seulement si la case enlevée est de couleur majoritaire ;

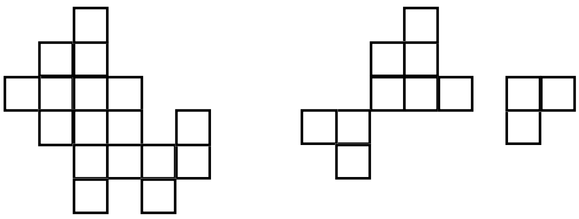
(*iii*) P pair de largeur au moins 2 privé de deux cases est pavable si et seulement si les cases enlevées sont de couleurs différentes (noire et blanche).

Définitions, condition nécessaire du pavage.

On voit une case comme un carré unité du plan, de la forme $k = [i, i+1] \times [j, j+1]$, où i et j sont entiers. Un polymino P est un ensemble fini de tels carrés du plan : on peut assimiler un polymino à un échiquier amputé de certaines de ses cases.

Si deux carrés unités k' et k'' ont un côté commun, ils sont appelés **voisins**.

Un polymino P est **connexe** si et seulement si pour chaque couple de ses carrés k' et k'' il existe une séquence de carrés $k_1, k_2, \dots, k_n$ de P telle que $k_1 = k'$, $k_n = k''$ et les carrés k_i et k_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, sont voisins (figures 1.a. et 1.b.).



(a) Polymino connexe *(b) Polymino non-connexe*

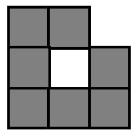
Figures 1.

Il est facile de voir qu'un polymino P non-connexe est composé de plusieurs morceaux, chacun étant appelé une **composante connexe** : une composante connexe est ainsi une partie de P qui est maximale [qui n'est pas contenue dans une partie plus grosse] pour la propriété d'être un polymino connexe.

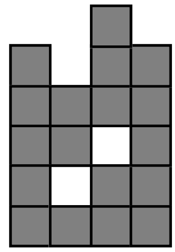
Le nombre de carrés formant un polymino sera appelé sa **taille**. Alors, un domino est un polymino connexe de taille 2.

On definit le bord $B(P)$ d'un polymino P comme un ensemble des côtés de carrés de P qui appartiennent à un seul carré de P et des sommets de carrés de P qui appartiennent à moins que quatre carrés de P.

Soit P un polymino connexe. On dit que P est sans trou si et seulement si $B(P)$ est connexe. Sinon on appelle un trou dans P un ensemble fini de carrés unités du plan n'appartenant pas à P et dont le bord est dans $B(P)$, connexe et ne peut pas être prolongé dans $B(P)$ (figures 2.*a*. et 2.*b*.).



(a) Polymino connexe sans trou

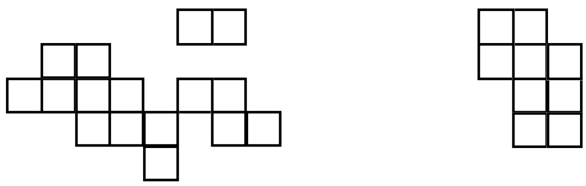


(b) Polymino connexe avec un seul trou

Figures 2.

On dit qu'un polymino P est **pavable par des dominos** ssi il existe une partition de P en dominos $D_1, D_2, \dots, D_s$ tels que $D_i \in P$, $i = 1, 2, \dots, s$, $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_s = P$ et l'intersection $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$ ne contient aucun carré (figures 3.*a*. et 3.*b*.). Donc si P est pavable, on appelle une telle partition un **pavage** de P.

Il est facile de voir que P est pavable si et seulement si chacune de ses composantes connexes est pavable.



(a) Un polymino pavable *(b) Un polymino non-pavable*

Figures 3.

Soit P un polymino de taille n. Les lemmes suivants sont évidents.

Lemme 1. Si P est pavable, alors n est pair.

Lemme 2 ("**Lemme de l'échiquier**"**).** Si P est pavable, alors une bicoloration de P "en damier" a autant de cases blanches ($^n/_2$) que de cases noires ($^n/_2$).

Notons que le **Lemme 2** est plus fort que le **Lemme 1**. Il résulte du fait que chaque domino couvre deux cases de couleurs différentes.

Graphes et polyminos.

[NDLR : la compréhension de cette section n'est pas indispensable à la poursuite de la lecture.]

Soit $G(P) = (V, E)$ le graphe W simple d'un polymino P dont les carrés constituent les **sommets** et dont les couples de carrés voisins constituent les **arêtes** de $G(P)$. [NDLC : en anglais, sommets = vertices & arêtes = edges.] Il est facile de voir que pour tout polymino P le graphe $G(P)$ est **biparti**, c'est-à-dire : on peut partitionner l'ensemble $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, de telle manière que V_1 et V_2 sont stables (V_1 et V_2 correspondent aux cases de l'échiquier de la même couleur, figure 4).

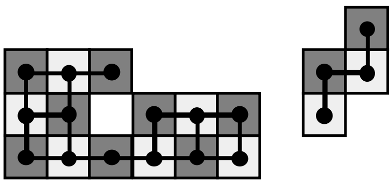


Figure 4. Polymino P et son graphe G(P)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **couplage** de G est un sous-ensemble M de E qui ne contient pas deux arêtes adjacentes. Un couplage M de G est dit **parfait** si tout sommet de G appartient à une arête de M. Il est évident qu'un couplage parfait est de cardinalité maximum dans G.

Pour un domino D le graphe $G(D)$ est formé de deux sommets adjacents. Donc trouver un pavage d'un polymino P revient à trouver une partition correspondante de $G(P)$ en couples de sommets adjacents de $G(P)$. Chaque tel couple de sommets vu de $G(P)$ correspond à une arête de $G(P)$. Donc la partition cherchée revient à trouver un couplage parfait dans $G(P)$.

Pour trouver un couplage de cardinalité maximum dans un graphe on connaît un algorithme de complexité $O(m\sqrt{n})$. Dans le graphe $G(P)$ associé à un polymino P tous les sommets sont au plus de degré 4. Donc dans $G(P)$ m est inférieur à $2n$. Par conséquent l'algorithme de couplage maximum dans $G(P)$ est de complexité $O(n\sqrt{n})$. A l'issue de l'algorithme on obtient un couplage maximum M de $G(P)$. Si la cardinalité de M est $n/2$, alors le couplage obtenu est parfait et correspond à un pavage de P, sinon il n'y a pas de couplage parfait dans $G(P)$ et donc il n'y a pas de pavage de P non plus.

Pavage d'un polymino rectangulaire par des dominos.

Nous regardons le pavage par des dominos d'un polymino P rectangulaire sans case enlevée, avec une et deux case enlevées. On dit que P est **pair** si il contient initialement un nombre pair de carrés et **impair** sinon. Pour un polymino P rectangulaire on dit que P est de **largeur** h si il contient h lignes et de **longueur** l s'il contient l colonnes de carrés. Si un carré k se trouve dans la i-ème ligne de P et dans la j-ème ligne de P, alors on dit que k a les coordonnées (i, j) dans P (figure 5).

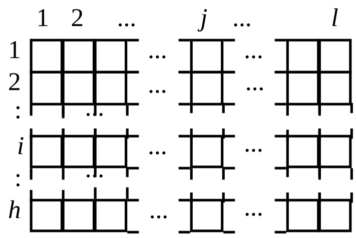


Figure 5. Un polymino rectangulaire

Théorème. Soit P un polymino rectangulaire. Alors

(i) P sans case enlevée est pavable ssi P est pair ;

(ii) P avec une case enlevée est pavable ssi P est initialement impair et la case enlevée est de couleur majoritaire ;

(iii) P de largeur au moins 2 et avec 2 cases enlevées est pavable ssi P est pair et les cases enlevées sont de couleurs différentes (noire et blanche).

Démonstration. Il est facile de voir que les conditions de chaque partie (i), (ii) et (iii) sont des cas particuliers de la condition nécessaire générale. Donc on montre les réciproques pour chacune des parties.

(i) P est pair entraîne qu'on a h ou l pair. Sans perdre de généralité on suppose que h est pair. Alors il est facile de voir que chaque colonne de P est pavable, donc P est pavable (figure 6).

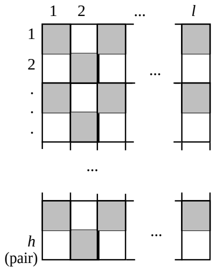


Figure 6

(ii) Soit la couleur majoritaire (celle des carrés dans les coins de P) est noire. Alors on peut voir que les coordonnées d'une case noire k de P sont de même parité, c'est-à-dire $i \equiv j \bmod 2$. Dans tous les cas (selon la parité de i et j) P peut être partitionné en quatre polyminos rectangulaires pairs :

$$P_1 = \{1, \ldots , i\}\times\{1, \ldots , j-1\},$$
$$P_2 = \{1, \ldots , i-1\}\times\{j, \ldots , l\},$$
$$P_3 = \{i+1, \ldots , h\}\times\{1, \ldots , j\}$$
$$\text{et } P_4 = \{i, \ldots , h\}\times\{j+1, \ldots , l\}$$

(notons que l et h sont impairs, figure 7) qui sont pavables d'après la partie (i). Donc P est pavable.

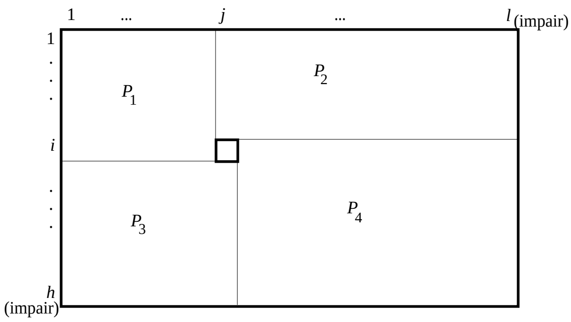


Figure 7.

(iii) Sans perdre de généralité on suppose que la longueur l est paire. Si P est de largeur 1, alors on peut avoir P non pavable (figure 8).

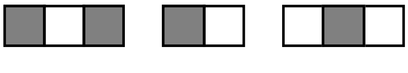


Figure 8.

Si P est de largeur au moins 2, alors initialement dans $G(P)$ il existe un cycle **hamiltonien**, c'est-à-dire un cycle qui passe par tous les sommets de $G(P)$ une seule fois, comme sur la figure 9.

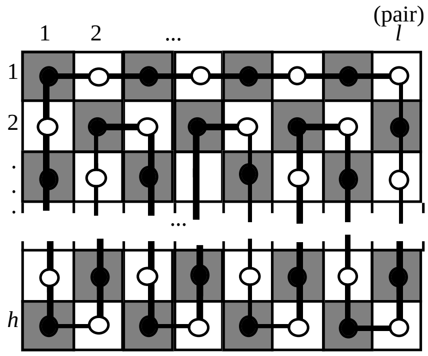


Figure 9.

Ce cycle est de longueur paire et les cases noires alternent avec les cases blanches. Il est facile de voir que si on enlève deux cases de couleurs différentes du cycle, on obtient soit une, soit deux chaînes alternant de longueur paire (chaque chaîne a deux extrémités de couleurs différentes). Ces chaînes sont évidemment pavables par des dominos, donc P est pavable (figure 10).

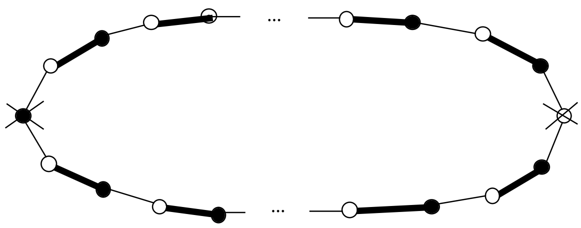


Figure 10. "Pavage" des chaînes dans le graphe correspondant G(P) π

Un polymino P est équilibré s'il vérifie le lemme de l'échiquier (autant de cases noires que de cases blanches).

Corollaire. Soit P est un polymino connexe rectangulaire avec 0, 1 ou 2 cases enlevées. P est pavable ssi P est équilibré.