les sans 9

par Sébastien Delaroque, DEUG A, 1ère année, Université d'Aix-Marseille 2

enseignant : Laurent Beddou

chercheur : Christian Mauduit

— les nombres sans 9
Etude des entiers dont l'écriture n'utilise pas le chiffre 9, et plus généralement des nombres dont l'écriture dans une base fixée n'utilise aucun chiffre d'une liste donnée à l'avance.

Comptons les "sans 9".

Définitions et notations

On appelle "sans 9" tout entier positif dont l'écriture en base 10 ne comporte pas le chiffre 9. De même on appelle "avec 9" tout entier positif dont l'écriture en base 10 comporte le chiffre 9 .

On note $E_9 = \{n \in \mathrm{N} : n$ est un "avec 9"$\}$. E_9 est infini et dénombrable. Soit $(a, b) \in \mathrm{N}^2$, on note $[a, b[$ l'ensemble des entiers naturels n compris entre a et b, b exclus (c'est-à-dire tels que $a \leq n < b$).

Comptage.

Dénombrement (arbre)

Considérons les nombres entiers comme des juxtapositions des chiffres de la base 10. Pour compter les "sans 9" dans l'intervalle $[0, 10^n[$, n appartient à N^*, il suffit de construire tous les nombres composés de n chiffres (i.e. de $[0, 10^n[$) sans le chiffre 9 et de les compter. On obtient un arbre combinatoire [où chaque position d'un chiffre donne lieu à 9 choix possibles]. On compte ainsi 9^n nombres "sans 9" dans $[0, 10^n[$.

Exemple. Entre 0 et 100, *i.e.* dans $[0, 10^2[$, il y a $9^2 = 81$ nombres "sans 9".

Utilisation de la base 9

Soit $a \in \mathrm{N} \backslash E_9$. Comptons le nombre de nombres "sans 9" qui sont dans l'intervalle $[0, a[$: il suffit de considérer l'écriture de a en base 10, soit $a = a_p \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$, comme celle en base 9 d'un nombre a' :

$$a' = a_0 + a_1 \times 9 + a_2 \times 9^2 + a_3 \times 9^3 + \ldots + a_p \times 9^p$$

[Le nombre a' est l'effectif cherché].

Exemple. Il y a autant de nombres "sans 9" dans [0, 192[que dans [0, 188] [car 189, 190, 191 sont des nombres "avec 9" …]. Or 188 est l'écriture en base 9 du nombre 161 :

$$8 + 8 \times 9 + 2 \times 9^2 = 161.$$

il y a 161 nombres "sans 9" dans [0, 192[.

Remarques

• La proportion des nombres "sans 9" dans $[0, 10^n[$, avec $n \in$ N, est $d(n) = 9^n/10^n$. La densité dans N des "sans 9"[, limite de $d(n)$ lorsque n tend vers l'infini,] est donc 0. :

• Il y a autant de "sans 9" que de "sans 8" ou de "sans 7", etc, dans des intervalles du type $[0, 10^n[$, $n \in$ N.

Extension aux sans k chiffres distincts en base b quelconque.

Prenons un entier $b > 1$ comme base de numération.

Définition. [On choisit $k \le b$.] On appelle "sans k chiffres en base b" tout nombre dont l'écriture en base b ne comporte aucun chiffre d'une liste fixée de k chiffres de cette base. (Exemple : 12346890 est un sans 5 sans 7 → c'est un "sans 2 chiffres", en base 10).

Comptage :

Sur le même principe que celui du dénombrement des "sans 9", on compte $(b - k)^n$ nombres "sans k chiffres en base b" dans l'intervalle $[0, b^n[$.

Les "avec p-uplets" en base 10.

Définition. Soit p entier positif non nul. Soit A un p-uplet c'est-à-dire une séquence

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$$

formée de p chiffres de la base 10. On appelle "nombre avec A" en base 10 tout nombre entier positif dont l'écriture en base 10 comporte la séquence A (l'ordre est donc important).

Exemple. 34878 comporte la séquence (8, 7, 8) mais aussi (4, 8) ,etc.

comptage (formule seule) :

Le nombre de avec p-uplets en base 10 dans l'intervalle $[0, 10^n[$, $n \ge p$ est :

$$10^{n-p+1} - 9^{n-p+1}.$$

Exemple. Combien de "avec (1, 0, 0)" dans l'intervalle $[0, 10^6[$? Ici $n = 6$ et $p = 3$. Il y a donc $10^{6-3+1} - 9^{6-3+1} = 3439$ nombres "avec (1, 0, 0)" dans cet intervalle.

Ouvertures - Conjectures.

(i) Il semblerait que le nombre de nombres "avec k p-uplets en base b" dans l'intervalle $[0, b^n[$, soit, avec $p \le n$ et $k \le b$:

$$b^{n-p+1} - (b-k)^{n-p+1}.$$

(ii) La fonction définie par

$$f(n) = n + \sum_{i=1}^{i_n} \left[\mathrm{E}(n/9^i) \times 10^{i-1} \right]$$

avec $i_n = \mathrm{E}\big(\ln(n) / \ln(3)\big)+1$, serait une bijection de N dans E_9. [NDLC. La notation $E(x)$ désigne, comme il en est coutume, la partie entière du nombre x.]

(iii) J'ai commencé à travailler sur les carrés et cubes parfaits sans un chiffre. C'est du travail de probabilistes !

(iv) Problème ouvert : les nombres premiers sans un chiffre. [NDLR. Par exemple, y a-t-il une infinité de nombres premiers "sans 9" ?]