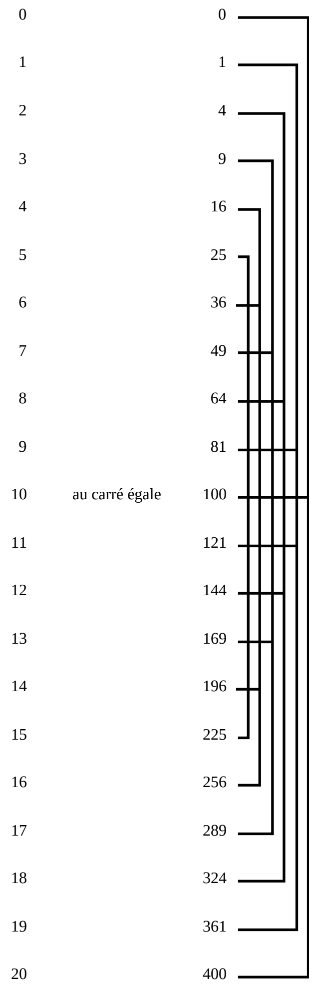
les carrés

par Marion Bordes, Sylvie Clap, Bérengère Collinot, Alvaro D. S. Carvalho, Anne Franey, Stéphane Simon, Leslie Wimmers, Nicolas Zerling, élèves de 1°S1 du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77)

enseignante : Sandrine Lefranc

chercheur : Olivier Bodini

Nous avons remarqué certaines propriétés en faisant la liste des carrés des premiers entiers naturels.



Tout d'abord, le chiffre des unités d'un entier élevé au carré ne peut pas être n'importe quel entier.

Ensuite, ce chiffre se répète de dix en dix et on remarque une symétrie de répartition par rapport au milieu de chaque dizaine, un effet de miroir.

Nous avons également remarqué certaines propriétés concernant les nombres obtenus en supprimant le chiffre des unités au carré d'un entier.

Remarque : Tout nombre peut se décomposer en une somme de la forme : $10\,k + x$, où k est un entier naturel et x un chiffre de 0 à 9.

Propriété : Soit x un chiffre entre 0 et 9 et soit k un entier naturel. Alors x^2 et $(10\,k + x)^2$ possèdent le même chiffre des unités, ce qui équivaut à dire que l'on a une répétition du chiffre des unités des carrés de 10 en 10.

Démonstration. On a :

$$(10\,k + x)^2 = 100\,k^2 + 20\,kx + x^2.$$

Or $100\,k^2 + 20\,kx$ est un nombre se terminant par 0, il n'a aucune influence sur le chiffre des unités de $(10\,k + x)^2$ qui a donc le même chiffre des unités que x^2.

Conséquence. Les seuls chiffres des unités qui peuvent apparaître dans le carré d'un entier sont 0, 1, 4, 5, 6, 9. Il n'existe aucun carré se terminant par 2, 3, 7 ou 8.

Propriété. Soit x un entier compris entre 0 et 4. Alors $(5 - x)^2$ et $(5 + x)^2$ ont le même chiffre des unités.

Démonstration. C'est x^2 qui influe sur le chiffre des unités. C'est un miroir et donc, à l'intérieur d'une dizaine, les chiffres des unités se reflètent de part et d'autre des milieux de dizaines tels que 5, 15, 25, 35 …

Autre remarque : On constate une règle s'appliquant aux nombres des dizaines. [NDLC. Voir ci-contre.]

Lorsqu'on écrit à la suite différents carrés de nombres qui se suivent, on constate que **quatre** fois de suite, on ajoute le même nombre n au chiffre des dizaines du carré précédent ; puis on ajoute **six** fois de suite ce nombre $n + 1$ au chiffre des dizaines du carré précédent ; puis **quatre** fois de suite à nouveau en ajoutant 1 au nombre précédent, etc.

nombres			**commentaires**
	car	**rés**	
0			
		0	
1			
		1	
2			
		4	
3			
		9	
4	+ 1		
	1	6	
5	+ 1		
	2	5	on a ajouté 4 fois **1**
6	+ 1		au nombre de dizaines
	3	6	
7	+ 1		
	4	9	
8	+ 2		(+ **1**)
	6	4	
9	+ 2		
	8	1	
10	+ 2		
	10	0	on a ajouté 6 fois **2**
11	+ 2		au nombre de dizaines
	12	1	
12	+ 2		
	14	4	
13	+ 2		
	16	9	(+ **1**)
14	+ 3		
	19	6	
15	+ 3		
	22	5	on a ajouté 4 fois **3**
16	+ 3		au nombre de dizaines
	25	6	
17	+ 3		
	28	9	
18	+ 4		
	32	4	

On peut ainsi prévoir d'autres nombres.