les nombres carrés

par Audrey Blaise, Irène Gernet, Céline Kouoi, Anna Tiev, Sonia Voglozin du Collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)

enseignants : Pierre Lévy, Mauricette Ramillon

chercheurs : Olivier Bodini, Pierre Duchet

— nombres carrés, carrément bizarres

Certains nombres de pions peuvent se mettre en forme carrée : 1=1×1, 4=2×2, 9=3×3, 16=4×4, 25=5×5, 36=6×6, puis 49, 64, 81, 100, 121, etc. On les appelle des carrés parfaits ou simplement des carrés. Quels sont ces nombres ? Par quels chiffres se terminent-ils ? Comment les reconnaître ? En combinant des nombres carrés (par addition, soustraction, etc) peut-on tout exprimer ?

Le but de notre recherche est de pouvoir reconnaître les carrés parfaits sans calculatrice.

Un carré parfait est un nombre obtenu en multipliant un nombre entier par lui-même. Par exemple, 4 est un carré parfait car $4 = 2 \times 2$.

Voici la liste des premiers carrés parfaits :

nombre	0	1	2	3	4
carré du nombre	0	1	4	9	16
nombre	5	6	7	8	9
carré du nombre	25	36	49	64	81
nombre	10	11	12	13	14
carré du nombre	100	121	144	169	196

1996 est-il par exemple un carré parfait ?

Nombre de zéros à la fin d'un carré.

On sait que $2^2 = 4$. Mais on a remarqué que $20^2 = 400$; $200^2 = 40\,000$; … Le carré d'un nombre se termine toujours par le double du nombre de zéros à la fin du nombre.

Prouvons cette remarque :

$$(a \times 10)^2 = a^2 \times 10^2 = a^2 \times 100.$$

On ferait exactement la même chose en remplaçant 10 par 100, 1 000, …

Un nombre qui se termine par un nombre impair de zéros ne pourra jamais être le carré d'un nombre. Par contre, il existe des nombres qui se terminent par un nombre pair de zéros et qui ne sont pas des carrés : 500 par exemple car 5 n'est pas un carré. 90 000 en est un car $9 = 3^2$ et il se termine par 4 zéros. C'est le carré de 300.

Etude du dernier chiffre.

Si un nombre est un carré parfait, alors il se termine par 0, 1, 4, 5, 6, et 9. Aucun carré parfait ne se terminera par 2, 3, 7 ou 8. Il suffit d'étudier les 10 cas possibles pour s'en convaincre.

dernier chiffre du nombre

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

dernier chiffre du carré

0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Si le chiffre de unités du nombre est u, le chiffre des unités du carré de ce nombre sera le chiffre des unités de u^2. Si par exemple un nombre se termine par 3, son carré se terminera comme le carré de 3, c'est-à-dire par 9. Si un nombre se termine par 8, son carré se terminera comme le carré de 8, c'est-à-dire par 4. Pour prouver une telle affirmation, il nous a fallu expliquer comment calculer le carré de N.

Lien entre des carrés

Nous avions remarqué que chaque fois qu'on compare le carré d'un nombre avec celui d'un autre nombre éloigné de deux rangs, on doit additionner les nombres, les multiplier par 2 et additionner le carré du premier nombre avec le nombre obtenu pour aboutir au carré de l'autre nombre.

Par exemple, avec 4 et 6. On peut remarquer que 16 est le carré de 4 et que 36 est le carré de 6 ; 4 + 6 = 10, 10 × 2 = 20 et 16 + 20 = 36 qui est bien le carré de 6.

Si a est un nombre entier, $a + 2$ est bien le nombre éloigné de 2 rangs. Traduisons notre remarque, on obtient :

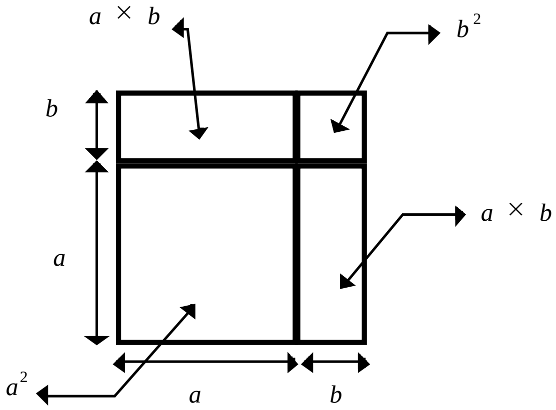
$$(a + 2)^2 = [a + (a + 2)] \times 2 + a^2.$$

Si on calcule en développant $(a + 2)^2$ on obtient :

$$A = (a + 2)^2 = (a + 2)\,(a + 2)$$
$$A = (a + 2) \times a + (a + 2) \times 2$$
$$A = a \times a + 2 \times a + a \times 2 + 2 \times 2$$
$$A = a^2 + 2 \times a + 2 \times a + 2^2$$

Est-ce bien la même formule ?

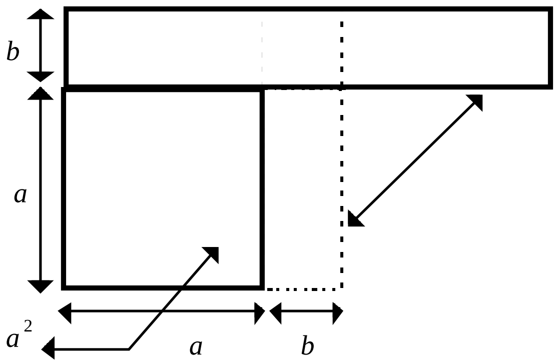
Pour mieux comprendre, nous avons utilisé une représentation géométrique qui d'ailleurs nous a permis de généraliser nos formules en remplaçant 2 par b.



Sur ce dessin, on a dessiné un carré de côté $a + b$. Son aire est donc $(a + b)^2$. La figure se décompose en 4 morceaux et on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + a \times b + a \times b + b^2.$$

Si on modifie la disposition d'un des rectangles, on obtient :



La figure se décompose en deux morceaux : un carré de côté a et un rectangle de largeur b et de longueur $(a + b) + a$. On a :

$$(a + b)^2 = [(a + b) + a] \times b + a^2.$$

Les deux formules sont donc parfaitement équivalentes. Nous pouvons maintenant nous en servir pour expliquer comment trouver le chiffre des unités d'un carré.

Si $N = A \times 10 + u$, alors $N^2 = (A \times 10 + u)^2$. On utilise l'une des deux formules précédentes : $(A \times 10 + u)^2$
$= (A \times 10)^2 + (A \times 10 \times u) + (A \times 10 \times u) + u^2$.
$= \mathrm{A}^2 \times 100 + 2(\mathrm{A} \times u \times 10) + u^2$.

Le chiffre des unités de N^2 ne peut donc être **que** celui des unités de u^2. C'est pourquoi notre tableau est correct.

Ordre de grandeur

On cherche l'ordre de grandeur du nombre pour se rapprocher du carré parfait. Par exemple, prenons 3364. Le dernier chiffre étant 4, on a le choix entre 2 et 8 comme dernier chiffre du nombre. 3364 est compris entre 2500 et 3600 qui sont les carrés de 50 et de 60. Si 3364 est un carré, c'est donc forcément le carré de 52 ou de 58. Comme 3364 est plus proche de 3600 que de 2500, il peut éventuellement être le carré de 58.

Avec 1996, on procède de la même manière ; 1996 est compris entre 1600 et 2500 qui sont les carrés de 40 et de 50. 1996 serait alors le carré d'un nombre compris entre 40 et 50. D'après son dernier chiffre, ce nombre se terminerait par 4 ou par 6. 1996 serait donc le carré de 44 ou 46. 1996 étant plus proche de 1600 que de 2500, il serait le carré de 44. Or $44^2 = 1936$ donc 1996 n'est pas un carré parfait.

Nous avions commencé à nous intéresser au deux derniers chiffres d'un carré. Nous avions remarqué par exemple que si on calcule le carré des nombres à 2 chiffres se terminant par 1 on a :

carrés des nombres	remarques sur les premiers chiffres (en **gras**)	remarques sur l'avant dernier chiffre (souligné)
$11^2 = \mathbf{1}\underline{2}1$	$\mathbf{1} = 1^2$	$\underline{2} = 2 \times 1$
$21^2 = \mathbf{4}\underline{4}1$	$\mathbf{4} = 2^2$	$\underline{4} = 2 \times 2$
$31^2 = \mathbf{9}\underline{6}1$	$\mathbf{9} = 3^2$	$\underline{6} = 2 \times 3$
$41^2 = \mathbf{16}\underline{8}1$	$\mathbf{16} = 4^2$	$\underline{8} = 2 \times 4$
$51^2 = \mathbf{26}\underline{0}1$	$\mathbf{26} = 5^2 + 1$	$1\underline{0} = 2 \times 5$
$61^2 = \mathbf{37}\underline{2}1$	$\mathbf{37} = 6^2 + 1$	$1\underline{2} = 2 \times 6$
$71^2 = \mathbf{50}\underline{4}1$	$\mathbf{50} = 7^2 + 1$	$1\underline{4} = 2 \times 7$
$81^2 = \mathbf{65}\underline{6}1$	$\mathbf{65} = 8^2 + 1$	$1\underline{6} = 2 \times 8$
$91^2 = \mathbf{82}\underline{8}1$	$\mathbf{81} = 9^2 + 1$	$1\underline{8} = 2 \times 9$

Nous étions capables de prévoir quel sera l'avant dernier chiffre du carré d'un nombre de deux chiffres se terminant par 1. Pour cela, il suffit de multiplier par 2 le chiffre des dizaines et de ne prendre que les unités du résultat.

Nous ne savions expliquer pourquoi avant d'avoir établi les formules que nous avons démontrées. En effet, maintenant tout est clair ; reprenons un des calculs précédents : nous utilisons la formule

$$(a + b)^2 = a^2 + a \times b + a \times b + b^2$$
$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 50 \times 1 + 50 \times 1 + 1^2$$

50^2 ne nous intéresse pas car c'est un nombre dont le chiffre des dizaines est 0 ; 1^2 non plus ; il reste donc 2×50. Comme on ne s'occupe ici que des dizaines, cela revient à calculer 2×5 ; on obtient 10 dizaines c'est-à-dire 1 centaine et 0 dizaine. C'est bien le résultat annoncé.

Réessayons avec 81 :

$$81^2 = (80 + 1)^2 = 80^2 + 80 \times 1 + 80 \times 1 + 1^2$$

80^2 ne nous intéresse pas car c'est un nombre dont le chiffre des dizaines est 0 ; 1^2 non plus ; il reste donc 2×80. Comme on ne s'occupe ici que des dizaines, cela revient à calculer 2×8 ; on obtient 16 dizaines c'est-à-dire 1 centaine et 6 dizaines. C'est bien le résultat annoncé et c'est ce qui explique aussi pourquoi il faut ajouter 1 lorsqu'on cherche le nombre de centaines (les chiffres en gras) du carré.

On peut maintenant généraliser : si on veut obtenir rapidement l'avant dernier chiffre du carré d'un nombre s'écrivant $d1$ c'est-à-dire d dizaines et 1 unité, il suffit de prendre le chiffre des unités de $2 \times d$: $(d1)^2 = (d\times10+1)^2 = (d \times 10)^2 + d \times 10 \times 1 + d \times 10 \times 1 + 1^2$

Le chiffre des dizaines de $(d1)^2$ est donc bien le chiffres des dizaines de $2 \times d \times 10$ c'est-à-dire le chiffre des unités de $2 \times d$.

Conclusion.

Il nous a fallu beaucoup de temps pour construire des outils pouvant expliquer toutes les observations que nous faisions en calculant des carrés. Mais maintenant que nous possédons des formules générales, nous sommes persuadées que nous pouvons encore aller bien plus loin dans ce genre de recherches.