les chaînes d'additions

par Sophie Lafenetre et Clément Bouchet, Tle S, du lycée Sud-Médoc au Taillan-Médoc (33)

enseignantes : Carine Burbeau et Dominique Grihon

chercheur : Laurent Habsieger

— chaînes d'additions

1 donne 2, en ajoutant 1 ; puis on ajoute deux des nombres précédemment obtenus ; et on recommence … Pour chaque n entier, on cherche à obtenir la chaîne d'additions la plus courte. Si $L(n)$ est la longueur de cette chaîne, étude de $L(n)$?

le sujet

On part de 1 ; on lui ajoute 1, on obtient 2 ; on a maintenant deux nombres à notre disposition ; on peut donc ajouter 1 et 2 ou 2 et 2 ; on a maintenant 2 chaînes : 1 2 3 et 1 2 4 et on continue ainsi.

Une conjecture nous a été proposée : il s'agit de montrer que pour tout n, on a $L(2^n - 1) \leq n - 1 + L(n)$, $L(n)$ étant la longueur de la chaîne la plus courte pour arriver à n.

les puissances de 2

Expérimentalement, on constate que :

$$L(2^0) = L(1) = 0,$$
$$L(2^1) = L(2) = 1,$$
$$L(2^2) = L(4) = 2$$

On a donc la relation suivante à démontrer : $L(2^n) = n$ avec n entier naturel.

a) obtention de la relation $L(2^n) \geq n$.
On obtient les multiples de 2 en ajoutant le nombre obtenu à lui même ce qui revient à multiplier par 2 donc pour aboutir à 2^n il a fallu n fois multiplier par 2. Mais, même si on est sûr d'arriver à 2^n, on ne sait pas si cette chaîne est la plus courte, d'où la relation $L(2^n) \geq n$.

b) démonstration de la relation : $L(2^n) \leq n$. On va montrer que tout nombre obtenu au bout de p étapes est inferieur ou égal à 2^p.

Au bout d'une étape, on obtient 2, donc la relation est vérifiée au rang 1.

On suppose que tous les nombres obtenus à la $p^{\text{ème}}$ étape sont plus petits que 2^p ; soit X_{p+1} un nombre obtenu au bout de $p + 1$ étapes ; alors il a été obtenu en ajoutant deux nombres X_i et X_j eux-mêmes obtenus à des étapes inférieures ou égales à p ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $X_i \leq 2^p$ et $X_j \leq 2^p$ alors $X_{p+1} = X_i + X_j \leq 2^p + 2^p$, d'où $X_{p+1} \leq 2^{p+1}$. Donc pour obtenir 2^n il faut au moins n étapes.

c) conclusion : puisque $L(2^n)$ est à la fois inférieur ou égal à n et supérieur ou égal à n, alors $L(2^n) = n$.

expression de $L(2^n - 1)$

Exemple de chaîne :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2^{n-1} \\ +2^0 & +2^1 & +2^2 & +2^3 & & +2^{n-2} \end{array}$$

Pour obtenir tous ces nombres il a fallu $n - 1$ étapes. Or, si on additionne tous les nombres obtenus, on obtient la somme des termes d'une suite géometrique de raison 2 :

$$S = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Donc pour obtenir $2^n - 1$, on peut fabriquer la chaîne suivante :

$1\ 2^1\ 3\ 2^2\ 7\ 2^3\ 15\ 2^4 \ldots 2^{n-2}\ 2^{n-1}-1\ 2^{n-1}\ 2^n-1$

La construction de cette chaîne a nécessité $2n-2$ étapes. On a donc : $L(2^n - 1) = 2n-2$.

démonstration de la conjecture pour $n = 2^m$

Pour $n = 2^m$, la conjecture devient :

$$L(2^{2^m} - 1) \leq 2^m - 1 + m.$$

On construit la chaine suivante : 1 2 3 6 12 15 30 60 120 240 255 … $2^{2^{k-1}}-1 \ldots 2^{2^k}-1$

Ainsi, on passe du terme $2^{2^{k-1}}-1$ au terme $2^{2^k} - 1$ en multipliant par $2^{2^{k-1}}+1$ ce qui représente $2^{2^{k-1}}+1$ étapes.

On en déduit alors que :

$$L(2^{2^m} - 1) \leq \sum_{k=0}^{m-1} (2^k + 1)$$

soit encore :

$$L(2^{2^m} - 1) \leq 2^m - 1 + m.$$