fractions égyptiennes

par Club Maths en jeans, Classe de Seconde, Lycée Montaigne, Bordeaux (33)

enseignant : Pierre Grihon

chercheur : Laurent Habsieger

— fractions égyptiennes
Conjectures concernant $4/n = {}^1/_x + {}^1/_y + {}^1/_z$ (Erdös) et $5/n = {}^1/_x + {}^1/_y + {}^1/_z$

Les fractions dites “égyptiennes” sont celles de la forme $1/n$, n étant un entier naturel.

Il existe de nombreux problèmes portant sur ces fractions. Parmi eux, deux conjectures :

Celle d’Erdös et Straus selon laquelle l’équation :

$$4/n = 1/x + 1/y + 1/z$$

peut être résolue avec des entiers naturels pour tout $n > 1$

Celle de Sierpinski, similaire, concernant l’équation :

$$5/n = 1/x + 1/y + 1/z$$

C’est sur ces deux conjectures que nous avons travaillé.

remarques

• Si $a/b = 1/x + 1/y + 1/z$, alors

$$a/(kb) = 1/(kx) + 1/(ky) + 1/(kz).$$

Ce qui revient à dire que si l’on sait décomposer la fraction a/b pour un nombre b donné, on sait aussi la décomposer pour tout les mutiples de b.

• a/b se décompose directement si une somme de trois multiples de b vaut a.

Par exemple, dans la fraction a/b, si i, j et k sont des multiples de b et que $i + j + k = a$ alors :

$$a/b = 1/(b/i) + 1/(b/j) + 1/(b/k).$$

• Si $a/b = 1/x + 1/w$, alors

$$a/b = 1/x + 1/(2w) + 1/(2w).$$

conjecture $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ **:**

Nous avons utilisé la méthode suivante: on cherche x tel que $1/x$ soit la fraction inférieure la plus proche de $4/n$. Si n n'est pas multiple de 4, cette fraction est $1/[E(n/4)+1]$. Puis on retranche $1/x$ de $4/n$ pour obtenir une fraction a/b. Enfin, on cherche y et z tels que : $a/b = 1/y + 1/z$. Comme il n'existe pas de solution générale à l'équation, nous avons distingué plusieurs cas :

[I] $n = 4\,m$
[II] $n = 4\,m + 1$
[III] $n = 4\,m + 2$
[IV] $n = 4\,m + 3$

[I] $n = 4\,m$

La fraction $4/(4\,m)$ est égale à $1/m$. On peut donc la décomposer ainsi :

$$4/(4\,m) = 1/(3\,m) + 1/(3\,m) + 1/(3\,m).$$

[II] $n = 4\,m + 1$

On procède alors comme on l'a indiqué :

$$x = E((4\,m + 1)/4) + 1 = m + 1,$$
d'où $1/x = 1/(m + 1)$.

$4/(4m+1) - 1/(m+1) = 3/[(4m+1)(m+1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout m.

[III] $n = 4\,m + 2$

Ce nombre est multiple de 2 :

$$4\,m + 2 = 2\,(2\,m + 1).$$

Comme on l'a indiqué, il suffit de savoir décomposer 4/2 pour pouvoir également décomposer $4/(4\,m + 2)$. 4/2 se décompose ainsi : $4/2 = 1/1 + 1/2 + 1/2$. Donc :

$$4/(4m+2) = 1/(2m+1) + 1/(4m+2) + 1/(4m+2).$$

[IV] $n = 4\,m + 3$

$4/(4\,m + 3) - 1/(m+1) = 1/[(4m+3)(m+1)]$.
D'où :
$$4/(4m+3) = 1/(m+1)+1/[2(4m+3)(m+1)] +1/[2(4m+3)(m+1)].$$

Il reste donc le cas : $n = 4\,m + 1$

Distinguons deux cas :

[A] $m = 2\,p$ ou $n = 8\,p + 1$
[B] $m = 2\,p + 1$ ou $n = 8\,p + 9$

[A] $m = 2\,p$

$4/(8p+1) - 1/(2p+1) = 3/[(2\,p + 1)(8\,p + 1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout p.

[B] $m = 2\,p + 1$

$4/(8p+5) - 1/(2p+2) = 3/[(8\,p + 5)(2\,p + 2)]$.
D'où :
$$4/(8p+5) = 1/(2p+2) + 1/[2(8p+5)(2p+2)] + 1/[2(8p+5)(2p+2)].$$

Il reste donc le cas $m = 2\,p$. Distinguons cette fois trois cas :

$p = 3\,q$ ou $n = 24\,q + 1$
$p = 3\,q + 1$ ou $n = 24\,q + 9$
$p = 3\,q + 2$ ou $n = 24\,q + 17$

$p = 3\,q$

$4/(24q+1) - 1/(6q+1) = 3/[(24q+1)(6q+1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout q.

$p = 3\,q + 1$

$4/(24q+9) - 1/(6q+3) = 3/[(24q+9)(6q+3)] = 1/[(24q+9)(2q+1)]$.

D'où :
$$4/(24q+9) = 1/(6q+3) + 1/[2(24q+9)(2q+1)] + 1/[2(24q+9)(2q+1)].$$

$p = 3\,q + 2$

$4/(24q+17) - 1/(6q+6) = 7/[(24q+17)(6q+6)]$.

D'où :
$$4/(24q+17) = 1/(6q+6) + 1/[(24q+17)(q+1)] + 1/[(24q+17)(6q+6)].$$

Nous nous sommes arrêtés au cas $n = 24q+1$.

[NDLR : les élèves fournissent aussi un programme en Pascal, que nous ne reproduisons pas, et qui cherche une décomposition comme indiqué en fin d'article, p. 38.]

conjecture $5/n = 1/x + 1/y + 1/z$ **:**

Nous utiliserons la même méthode que pour la décomposition de $4/n$. Ici, cinq cas sont distingués :

[I] $n = 5\,m$
[II] $n = 5m + 1$
[III] $n = 5m + 2$
[IV] $n = 5m + 3$
[V] $n = 5m + 4$

[I] $n = 5\,m$

La fraction $5/(5\,m)$ est égale à $1/\mathrm{m}$. On peut donc la décomposer ainsi :

$$5/(5\,m) = 1/(3\,m) + 1/(3\,m) + 1/(3\,m).$$

[II] $n = 5\,m + 1$

$5/(5\,m + 1) - 1/(m + 1) = 4/[(5m+1)(m+1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout m.

[III] $n = 5\,m + 2$

$5/(5\,m + 2) - 1/(m+1) = 3/[(5\,m + 2)(m+1)]$. D'où :
$5/(5\,m + 2) = 1/(m + 1) + 1/[(5m+2)(m+1)]$
$+ 1/[(5m+2)(m+1)/2]$.

[NDLR : $(5m+2)(m+1)$ est toujours pair car soit m est pair, et $5m+2$ aussi, soit m est impair et $m+1$ est pair ; donc $(5m+2)(m+1)/2$ est bien un entier.]

[IV] $n = 5\,m + 3$

$5/(5\,m + 3) - 1/(m+1) = 2/[(5\,m + 3)(m+1)]$. D'où :
$5/(5\,m + 3) = 1/(m + 1) + 1/[(5m+3)(m+1)]$
$+ 1/[(5m+3)(m+1)]$.

[V] $n = 5\,m + 4$

$5/(5\,m + 4) - 1/(m+1) = 1/[(5\,m + 4)(m+1)]$. D'où :
$5/(5\,m + 4) = 1/(m + 1) + 1/[2(5m+4)(m+1)]$
$+ 1/[2(5m+4)(m+1)]$.

Il reste donc le cas $n = 5\,m + 1$. A nouveau, deux cas :

[A] $m = 2\,p$ ou $n = 10\,p + 1$
[B] $m = 2\,p + 1$ ou $n = 10\,p + 6$

[A] $m = 2\,p$

$5/(10p+1) - 1/(2p+1) = 4/[(10p+1)(2p+1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout p.

[B] $m = 2\,p + 1$

$5/(10p+6) - 1/(2p+2) = 4/[(10p+6)(2p+2)]$. D'où :
$5/(10p+6) = 1/(2p+2) + 1/[(10p+6)(p+1)]$
$+ 1/[(10p+6)(p+1)]$.

Il reste le cas $m = 2\,p$. Trois cas enfin :

$p = 3\,q$ ou $n = 30\,q + 1$
$p = 3\,q + 1$ ou $n = 30\,q + 11$
$p = 3\,q + 2$ ou $n = 30\,q + 21$

$p = 3\,q$

$5/(30q+1) - 1/(6q+1) = 4/[(30q+1)(6q+1)]$; cette fraction ne peut se décomposer pour tout q.

$p = 3\,q + 1$

$5/(30q+11) - 1/(6q+3) = 4/[(30q+11)(6q+3)]$. D'où :
$5/(30q+11) = 1/(6q+3) + 1/[(30q+11)(2q+1)]$
$+ 1/[(30q+11)(6q+3)]$.

$p = 3\,q + 2$

$5/(30q+21) - 1/(6q+5) = 4/[(30q+21)(6q+5)]$. D'où :
$5/(30q+21) = 1/(6q+5) + 1/[(10q+7)(6q+5)]$
$+ 1/[(30q+21)(6q+5)]$.

Il reste donc le cas $n = 30\,q + 1$, où nous nous sommes arrêtés …

Pour certains cas non résolus, nous avons mis au point une méthode manuelle qui permet de les décomposer. Elle consiste à transformer la fraction a/b que l'on veut décomposer en une fraction égale c/d de façon à ce qu'une somme de trois facteurs de d vaille c. Si l'on appelle d_1, d_2 et d_3 les trois facteurs de d tels que $d_1 + d_2 + d_3 = c$, on a alors :

$$a/b = c/d = 1/(d/d_1) + 1/(d/d_2) + 1/(d/d_3).$$

Il faut que d soit supérieur à b. Pour mieux rechercher les facteurs de d, on écrit d sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

Exemple : 5/31.

5/31 = 40/248

$$248 = 31 \times 2 \times 2 \times 2 \ (\times\ 1)\ ;$$
$$31 + 2 \times 2 \times 2 + 1.$$

Donc ici, $d_1 = 31$, $d_2 = 8$, $d_3 = 1$. Alors : 5/31 = 40/248 = 1/8 + 1/31 + 1/248.

Nous avons prouvé d'autre part que si dans les équations :

$$5/(30q+1) = 1/x + 1/y + 1/z$$

$$4/(24q+1) = 1/x + 1/y + 1/z$$

x, y et z existent, alors il existe un nombre k entier tel que $a\,k = c$ et $b\,k = d$.

Preuve : Considérons une fraction e/f irréductible; toute fraction g/h égale à e/f est telle qu'il existe un nombre k entier tel que $e\,k = g$ et $f\,k = h$. Or, les fractions $5/(30q+1)$ et $4/(24q+1)$ sont irréductibles. Il existe donc bien un nombre k qui permet de passer de la fraction a/b, soit de la forme $5/(30q+1)$ soit de la forme $4/(24q+1)$, à la fraction c/d qui permet la décomposition.

[NDLR : les élèves fournissent un programme en Pascal, que nous ne reproduisons pas, et qui, pour les fractions de la forme $4/(24q+1)$, essaye tous les k jusqu'à obtenir la fraction c/d qui permet la décomposition. Ce programme en une page, non vérifié, sera adressé sur toute demande faite à l'AMeJ, et accompagnée d'une enveloppe timbrée.]

voir page suivante
dans cette version
pdf

```
type entier=longint;
     Table=array[1..10000] of entier;
var m,N  :entier;
    x    :entier;
    p,q  :entier;
    Divi:Table;
    u,v,nbd:entier;
function pgcd (a,b:entier):entier;
  begin
    if b=0
      then pgcd:=a
      else pgcd:=pgcd(b,a mod b )
  end;
procedure simplifie(var a,b :entier);
  var d:entier;
  begin
    d:=pgcd(a,b);
    if d>1
      then
        begin
          a:=a div d;b:=a div d
        end
  end;
procedure  cherche_diviseurs(n:entier;var T:table; var Nb :entier);
{ Construit la table des diviseurs}
  var i:entier;
  begin
    nb:=1;
    i:=2;
    T[nb]:=1;
    while i*i<=n do
      begin
        if n mod i=0
          then
            begin
              inc(nb);T[nb]:=i;
              if i*i<>n
                then
                  begin
                    inc(nb);T[nb]:=n div i;
                  end
            end;
        inc(i);
      end
   end;
function trouve(p:entier;var V:table;max:entier;var t,z:entier):boolean;
{recherche 2 nombres de somme p dans la table V}
  var i,j:entier;
  begin
    for i:=1 to max do
      for j:=i+1 to max do
        if V[i]+V[j]=p
          then
            begin
              t:=V[i];z:=V[j];trouve:=true;exit
            end;
    trouve:=false
  end;
begin
  clrscr;
  writeln(' On cherche N de la forme N=24m+1');
  write('Valeur de m ? ');readln(m);
  N:=24*m+1;
  x:=6*m+1;
  while x< (maxlongint div n) do
  begin
    p:=4*x-N;
    q:=x*N;
    simplifie(p,q);{writeln(p,' ',q);}
    cherche_diviseurs(q,Divi,nbd);
    if trouve(p,Divi,nbd,u,v) then
      begin
        writeln('4/',N,' = 1/',x,' + 1/',q div u,' + 1/',q div v);
      end;
    x:=x+1;
  end;
end.
```