problème de Syracuse

par Vincent Bonnaccorsi, Jean-Marc Lacaze (1°S), Christophe Roblin, Eric Vitasse (Tle S) du Lycée Sud Médoc, au Taillan-Médoc (33).

enseignantes : Carine Burbaud et Dominique Grihon

chercheur : Laurent Habsieger.

— problème de Syracuse
Etude de la suite définie par : $u_{n+1} = u_n/2$ si u_n est pair, $u_{n+1} = 3\,u_n + 1$ si u_n est impair.

Le sujet.

On part d'un entier n positif. Si n est pair, on le transforme en $n/2$; si n est impair, on le transforme en $3n+1$. Quel est le comportement de cette suite à long terme?

Premières observations.

Si $n = 6$, on obtient la suite : $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Si $n = 9$, on obtient : $9 \to 28 \to 14 \to 7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Pour tous les nombres n dont nous sommes partis (de 1 à 100, puis davantage grâce à un programme sur ordinateur), la suite aboutit toujours à 1.

Nous nous sommes intéréssés aussi à la longueur de cette suite que nous notons $L(n)$. Par exemple, $L(6) = 9$. Mis à part les entiers n de la forme 2^p pour lesquels on peut facilement montrer que la longueur vaut $p+1$, nous n'avons pas trouvé de relation entre n et $L(n)$. Pour n compris entre 1 et 26, $L(n)$ varie entre 1 et 24 mais $L(27) = 112$. A ce jour, nous n'avons pas trouvé d'explication à cet écart. Nous avons enfin observé des similitudes de longueurs en prenant certaines valeurs de n.

Nous avons constaté puis démontré que:

$$L(8k+4) = L(8k+5)$$

et

$$L(16k+18) = L(16k+19).$$

Démonstrations de ces deux conjectures.

$8k+4 \to 4k+2 \to 2k+1 \to 6k+4 \to$
$8k+5 \to 24k+16 \to 12k+8 \to 6k+4 \to$

Ceci montre qu'en 4 étapes, on retrouve le même nombre, donc :

$$L(8k+4) = L(6k+4) + 3 = L(8k+5)$$

pour k supérieur ou égal à 1.

$16k+18 \to 8k+9 \to 24k+28 \to 12k+14 \to 6k+7 \to 18k+22 \to$

$16k+19 \to 48k+58 \to 24k+29 \to 72k+88 \to 36k+44 \to 18k+22 \to$

Ceci montre qu'en 6 étapes, on retombe sur le même nombre, donc :

$$L(16k+18) = L(18k+22) + 5 = L(16k+19)$$

pour k supérieur ou égal à 1.

De même, on peut écrire :

$$L(16k+2) = L(16k+3)$$

avec k supérieur ou égal à 1, car :

$16k+2 \rightarrow 8k+1 \rightarrow 24k+4 \rightarrow 12k+2 \rightarrow 6k+1 \rightarrow 18k+4 \rightarrow$

$16k+3 \rightarrow 48k+10 \rightarrow 24k+5 \rightarrow 72k+16 \rightarrow 36k+8 \rightarrow 18k+4 \rightarrow$

Dans quels cas est-on sûr d'arriver à un nombre inférieur à** n **?

• Tout d'abord, voyons quel est l'intérêt de cette question : nous avons montré que si on était sûr que pour tout n, on arrivait à un nombre inférieur à n, alors la suite aboutirait toujours à 1.

Démonstration par récurrence : soit P_n la propriété « la suite débutant par n aboutit à 1 ».

Il est clair que P_1 est vraie.

Supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ soient vraies. Alors, ***si*** l'on est sûr qu'en partant de n on arrivera à un nombre p strictement plus petit que n, l'hypothèse de récurrence s'applique à p et on aboutira alors à 1, et donc P_n est vraie.

• Le problème maintenant est de voir ***si*** effectivement on aboutit à un nombre plus petit que celui du départ.

Si $n = 4\,k$: $4k \rightarrow 2k$ qui est inférieur à n.

Si $n = 4\,k + 2$: $4k+2 \rightarrow 2k+1$ idem.

Si $n = 4\,k + 1$: $4k+1 \rightarrow 12k+4 \rightarrow 6k+2 \rightarrow 3k+1$ qui est inférieur strictement à n ($k > 0$).

Si $n = 4\,k + 3$: $4k+3 \rightarrow 12k+10 \rightarrow 6k+5 \rightarrow 18k+16 \rightarrow 9k+8$. La parité de $9\,k + 8$ n'est pas connue. Il faut donc décomposer à nouveau ce cas suivant les valeurs de k.

A ce jour, nous n'avons rien trouvé de plus.