somme des cubes des chiffres

par Guillaume Smagghe et Eric Mirand du lycée George Sand, Le Mée sur Seine (77)

enseignante : Mme Joëlle Rhodes

chercheur : M. Loïc Allys

Sujet

A tout nombre entier naturel on peut associer un autre nombre, en répétant la même suite d'opérations.

Etude d'un premier exemple :

— Choisissez un nombre (entier naturel).
— Calculez la somme des cubes de ses chiffres. Vous obtenez un nouveau nombre.
— Calculez la somme des cubes de ses chiffres, etc …

Que remarquez vous ? Si vous n'avez rien remarqué, recommencez.

Voici ce que nous avons trouvé.
Nous avons calculé la somme des cubes des chiffres des nombres compris entre 1 et 100. Voici les résultats de quelques-uns d'entre eux :

$3 \to 3^3$
$27 \to 2^3 + 7^3$
$351 \to 3^3 + 5^3 + 1^3$
$153 \to 1^3 + 5^3 + 3^3$
153

Ce qui donne :

$$3 \to 27 \to 351 \to 153 \to 153$$

De même :

$12 \to 729 \to 1080 \to 513 \to 153 \to 153$

$4 \to 64 \to 280 \to 520 \to 133 \to 55 \to 250 \to 133$

$16 \to 217 \to 352 \to 160 \to 217$

Nous avons constaté que certains nombres reviennent plusieurs fois et de façon régulière; ainsi nous avons pu constater l'existence de “3 grandes familles” :

les nombres de la forme de $3k$;
les nombres de la forme de $3k + 1$;
les nombres de la forme de $3k + 2$ (k entier naturel).

Les nombres de la forme $3k + 2$ (k entier naturel)

2 → 8 → 512 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

5 → 125 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

8 → 512 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

11 → 2 → 8 → 512 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

14 → 65 → 341 → 92 → 737 → 713 → **371**

17 → 344 → 155 → 251 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

20 → 8 → 512 → 134 → 92 → 737 → 713 → **371**

Nous observons que nous obtenons toujours le même nombre 371 dont la sommes des cubes de ses chiffres est 371.

Les nombres de la forme $3k$ (k entier naturel)

3 → 27 → 351 → **153**

6 → 216 → 225 → 141 → 66 → 432 → 99 → 1458 → 702 → **153**

9 → 729 → 1080 → 513 → **153**

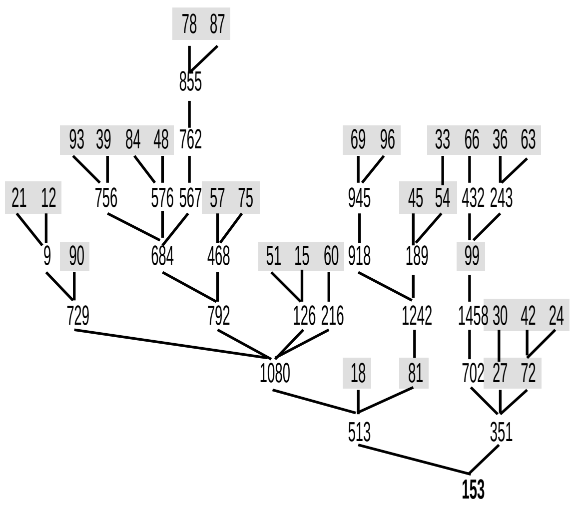
12 → 729 → 1080 → 513 → **153**

15 → 126 → 225 → 141 → 66 → 432 → 99 → 1458 → 702 → **153**

18 → 513 → **153**

21 → 9 → 729 → 1080 → 513 → **153**

Nous observons que nous obtenons toujours le même nombre 153 dont la sommes des cubes de ses chiffres est 153.



Les nombres de la forme $3k + 1$ (k entier naturel)

4 → 64 → 280 → 520 → **133** → **55** → **250** → **133**

7 → 343 → 118 → 514 → 190 → 730 → 370 → **370**

10 → 1 → **1**

13 → 28 → 520 → **133** → **55** → **250** → **133**

16 → **217** → **352** → **160** → **217**

19 → 730 → 370 → **370**

Pour les nombres de la forme $3k + 1$ nous n'avons rien remarqué de particulier sauf que certains nombres au bout d'un moment se répétent mais sans ordre logique.

Peut-être avez vous remarqué que les nombres qui composaient les cycles des nombres de la forme $3k$ (k entier naturel) étaient tous des multiples de 3. Nous allons prouver que :

Si $\underline{ab}$ est un multiple de 3, alors $a^3 + b^3$ est un multiple de 3.

Préliminaire : $\underline{ab}$ est un multiple de 3 si et seulement si $a + b$ est un multiple de 3. Preuve : $\underline{ab} = 10a + b = 9a + (a + b)$. Par conséquent, si $a + b$ est un multiple de 3, alors $9a + (a + b)$, donc $\underline{ab}$ aussi et réciproquement.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a^2+ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^3+ab^2\\ &= a^3+3a^2b+3\,ab^2+b^3\end{aligned}$$

Donc :

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - (3a^2\,b + 3ab^2)$$

Si $\underline{ab}$ est un multiple de 3 alors $(a + b)$ est un multiple de 3 et $(a + b)^3$ aussi. Comme $(3a^2\,b + 3ab^2) = 3(a^2\,b + ab^2)$ est un multiple de 3, alors $a^3 + b^3$ est un multiple de 3.

Ensuite, vous pourrez remarquer que ce phénomène se répète aussi avec les $3k + 1$ et les $3k + 2$. Ainsi les nombres qui composent le cycle des $3k + 1$ seront sous la forme $3k + 1$ et les nombres qui composent le cycle des $3k + 2$ seront sous la forme $3k + 2$; ce que nous allons prouver.

Nous avons d'abord démontré la propriété suivante : **Tout nombre entier n et son cube n^3 ont le même reste dans la division par 3.**

Si $n = 3k$ ***:***

$$(3k)^3 = 27k^3 = 3\,(9k^3)$$

donc $(3k)^3$ est un multiple de 3.

Si $n = 3k + 1$ ***:***

$$\begin{aligned}(3k + 1)^3 &= (3k + 1)\,(3k + 1)\,(3k + 1)\\ &= (9k^2 + 3k + 3k + 1)\,(3k + 1)\\ &= 27k^3 + 9k^2 + 9k^2 + 3k\\ &\qquad + 9k^2 + 3k + 3k + 1\\ &= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1\\ &= 3\,(9k^3 + 9k^2 + 3k) + 1\end{aligned}$$

donc $(3k + 1)^3$ a pour reste 1 dans la division par 3.

Si $n = 3k + 2$ ***:***

$$\begin{aligned}(3k + 2)^3 &= (3k + 2)\,(3k + 2)\,(3k + 2)\\ &= (9k^2 + 6k + 6k + 4)\,(3k + 2)\\ &= 27k^3 + 18k^2 + 18k^2 + 12k\\ &\qquad + 18k^2 + 12k + 12k + 8\\ &= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8\\ &= 3\,(9k^3 + 18k^2 + 12k + 2) + 2\end{aligned}$$

donc $(3k + 2)^3$ a pour reste 2 dans la division par 3.

Si $n \equiv 0$ [3] alors $n^3 \equiv 0$ [3]
Si $n \equiv 1$ [3] alors $n^3 \equiv 1$ [3]
Si $n \equiv 2$ [3] alors $n^3 \equiv 2$ [3]

Soit le nombre $\underline{abc}$ nous allons montrer que $\underline{abc}$ **et** $a + b + c$ **ont le même reste dans la division par 3.**

On appelle r_a, r_b, r_c les restes respectifs dans la division par 3 des chiffres a, b et c (les valeurs possibles pour r_a, r_b, r_c étant 0, 1 ou 2). r_a, r_b, r_c pouvant prendre des valeurs 0, 1, 2 alors la somme $r_a + r_b + r_c$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui ont dans la division par 3 les restes 0, 1 ou 2. Par conséquent $a + b + c$ a pour reste 0, 1 ou 2 dans la division par 3. Comme on a démontré que a^3, b^3 et c^3 ont le même reste dans la division par 3 que a, b et c, alors $a^3 + b^3 + c^3$ a pour reste 0, 1, ou 2 dans la division par 3. C'est pour cela que les nombres composant un cycle seront tous de la même forme $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$.

Etude d'un **deuxième exemple**. Nous avons étudié une autre forme de cycle ; nous allons vous l'expliquer comme ci-dessus :
— Choisissez un nombre (entier naturel).
— Rangez les chiffres dans l'ordre décroissant.
— Prenez le même nombre et ordonnez ses chiffres dans l'ordre croissant.
— Faites la différence des 2 nombres obtenus.
— Recommencez avec le nombre obtenu …

Que remarquez-vous ?

Voici ce que nous avons trouvé ; nous avons classé les différents nombres suivant le nombre de chiffres qui les composent. C'est-à-dire les nombres à 2 chiffres, à 3 chiffres etc …

Les nombres à** 2 **chiffres.

Exemples :

21 :	21–12=9	97 :	97–79=18
	9– 9=**0**		81–18=63
			63–36=27
			72–27=45
			54–45= 9
			9– 9= 0

Les différences sont des multiples de 9.

<u>Démonstration:</u>

$$\begin{aligned}\underline{ab} &= 10a + 1b\\ \underline{ba} &= 10b + 1a\\ \underline{ab} - \underline{ba} &= (10a + b) - (10b + a)\\ &= 10a + b - 10b - a\\ &= \mathbf{9}(a - b)\end{aligned}$$

$\underline{ab} - \underline{ba}$ est un multiple de 9.

Tous les multiples de 9 **à** 2 **chiffres cyclent sur** 0 **:**

18	27	36	45
81–18=63	72–27=45	63–36=27	54–45=9
63–36=27	54–45=9	72–27=45	9–9=0
72–27=45	9–9=0	54–45=9	
54–45=9		9–9=0	
9–9=0			

54	63	72	81
54–45=9	63–36=27	72–27=45	81–18=63
9–9=0	72–27=45	54–45=9	63–36=27
	54–45=9	9–9=0	72–27=45
	9–9=0		54–45=9
			9–9=0

Par conséquent : **tous les nombres à** 2 **chiffres cyclent sur** 0**.** Maintenant voici le cas des nombres à 3 chiffres :

Les nombres à** 3 **chiffres.

Exemple :

153 : 531–135=396
963–369=594
954–459=**495**
954–459=**495**

Les différences sont des multiples de 99**.**

Démonstration :

$\underline{abc} = 100a + 10b + c$
$\underline{cba} = 100c + 10b + a$

$$\begin{aligned}\underline{abc} - \underline{cba} &= 100a + 10b + c \\ &\quad - (100c + 10b + a) \\ &= 100a + 10b + c \\ &\quad - 100c - 10b - a \\ &= 99a - 99c = \mathbf{99}(a - c).\end{aligned}$$

$\underline{abc} - \underline{cba}$ est un multiple de 99.

Tous les multiples de 99 **à trois chiffres cyclent sur** 495 **ou** 0 **:**

$a - c$	$99(a-c)$	
1	99	99 → 0
2	198	198 → 792 → 693 → 594 → 495
3	297	297 → 693 → 594 → 495
4	396	396 → 594 → 495
5	495	495 → 495
6	594	594 → 495
7	693	693 → 594 → 495
8	792	792 → 693 → 594 → 495
9	891	891 → 792 → 693 → 594 → 495

Ce tableau nous permet d'affirmer que les nombres à 3 chiffres cyclent sur 495 ou 0. **Tous les nombres à trois chiffres cyclent sur** 495 **ou** 0**.**

Voici ce que nous avons trouvé pour les nombres à 4 chiffres.

Les nombres à** 4 **chiffres.

Exemple :

1532 : 5321 – 1235 = 4086
8640 – 0468 = 8172
8721 – 1278 = 7443
7443 – 3477 = 3996
9963 – 3699 = 6264
6642 – 2466 = 4176
7641 – 1467 = **6174**
7641 – 1467 = **6174**

Les différences sont des multiples de 9 **:**

Démonstration :

Soit un nombre $\underline{abcd}$ avec ses chiffres rangés dans l'ordre croissant et d les unités, c les dizaines, b les centaines, etc …

$\underline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + 1d$

Alors $\underline{dcba}$ est un nombre avec ses chiffres rangés dans l'ordre décroissant.

$$\begin{aligned}\underline{dcba} &= 1000d + 100c + 10b + 1a \\ \underline{abcd} - \underline{dcba} &= 1000a + 100b + 10c + 1d \\ &\quad - 1000d - 100c - 10b - 1a \\ &= 999a + 90b - 90c - 999d \\ &= \mathbf{999}\,(a - d) + \mathbf{90}\,(b - c)\end{aligned}$$

$\underline{abcd} - \underline{dcba}$ est donc un multiple de 9.

a – d	b – c	999(a – d) + 90(b – c)
0	0	0
1	1	1029 → 6174
1	0	999 → 6174
2	0	1998 → 6174
2	1	2088 → 6174
2	2	2178 → 6174
3	0	2997 → 6174
3	1	3087 → 6174
3	2	3177 → 6174
3	3	3267 → 6174
4	0	3996 → 6174
4	1	4086 → 6174
4	2	4176 → 6174
4	3	4266 → 6174
4	4	4356 → 6174
5	0	4995 → 6174
5	1	5085 → 6174
5	2	5175 → 6174
5	3	5265 → 6174
5	4	5355 → 6174
5	5	5445 → 6174
6	0	5994 → 6174
6	1	6084 → 6174
6	2	6174
6	3	6264 → 6174
6	4	6354 → 6174
6	5	6444 → 6174
6	6	6534 → 6174
7	0	6993 → 6174
7	1	7083 → 6174
7	2	7173 → 6174
7	3	7263 → 6174
7	4	7353 → 6174
7	5	7443 → 6174
7	6	7533 → 6174
7	7	7623 → 6174
8	0	7992 → 6174
8	1	8082 → 6174
8	2	8172 → 6174
8	3	8262 → 6174
8	4	8352 → 6174
8	5	8442 → 6174
8	6	8532 → 6174
8	7	8622 → 6174
8	8	8712 → 6174
9	0	8991 → 6174
9	1	9081 → 6174
9	2	9171 → 6174
9	3	9261 → 6174
9	4	9351 → 6174
9	5	9441 → 6174
9	6	9531 → 6174
9	7	9621 → 6174
9	8	9711 → 6174
9	9	9801 → 6174

Tous les nombres à quatre chiffres cyclent sur 6174 **ou** 0**.**

Selon les valeurs de *a*, *b*, *c* ou *d* le résultat obtenu cyclera sur 6174.

Nous pourrions faire ceci pour les 5, 6, 7 chiffres et jusqu'à l'infini … Mais à ce moment-là les démonstrations deviendront très complexes et très longues !