un cube parfait ?

par Carine Faure, Sandra Das Neves, élèves de 2nde du lycée Georges Braque d'Argenteuil (95), Thomas Beaugrand et Thierry Le Van Suu, élèves de 2nde du lycée Fragonard de l'Isle Adam (95)

enseignants : Annick Boisseau, Joëlle Richard, Halim Yayaoui

chercheur : M. Stéphane Labbé

lycées Georges Braque d'Argenteuil (95) & Fragonard de l'Isle Adam — ***découper un cube***
Découpage d'un cube en un nombre fini de cubes tous inégaux.

Peut-on découper un cube en un nombre fini de cubes ***tous inégaux*** et dont les faces soient parallèles aux faces du grand cube ? C'est à ce sujet que nous nous sommes intéressés cette année. Si un tel cube existe, on le nommera « cube parfait ». En supposant que cela soit possible, les faces de ce cube seront donc des carrés découpés en un nombre fini de carrés, dont les côtés seront parallèles à ceux du grand carré, sans superposition et tels que leurs longueurs soient **des nombres entiers tous inégaux** : on arrive alors à la notion de « carré parfait ».

Pour résoudre ce problème, nous avons commencé par quelques remarques concernant un carré parfait ; ce qui nous a permis de conclure quant au problème de l'existence du cube. Mais le problème du carré parfait n'est pas résolu pour autant. Nous allons vous faire part de notre tentative pour approfondir cette recherche. En particulier, nous avons essayé de construire des carrés parfaits.

Un aspect géométrique.

Structure du carré parfait

Nous avons démontré tout d'abord que **dans un carré parfait, le plus petit carré ne peut être placé ni sur un coin, ni sur un bord.** [NDLR : il y a forcément un seul plus petit carré — relire le sujet.] En effet, considérons un carré *ABCD* (figure 1.*a*.). Supposons que *AEFG* soit le plus petit carré placé sur un coin du grand carré. [Un autre carré, de côté *EI*, contient *EF* sur son bord.] Le rectangle *FGHI* ne peut contenir que des carrés de côtés plus petits ; alors *AEFG* ne serait pas le plus petit carré.

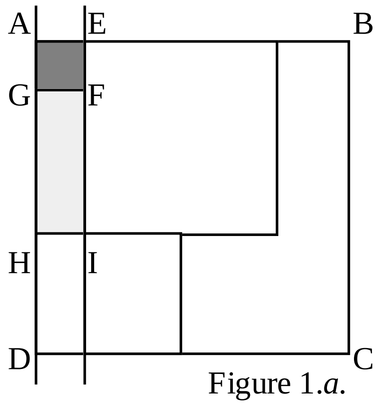

Figure 1.*a*.

[Un raisonnement analogue montrerait que le plus petit carré ne peut pas non plus être situé au bord (figure 1.*b*.).]

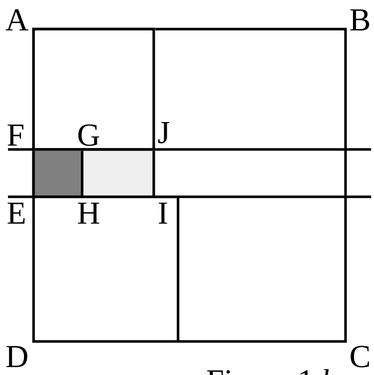

Figure 1.*b*.

On en conclut que dans un carré parfait, le plus petit carré doit être placé à l'intérieur de celui-ci mais il ne doit pas toucher les bords, ni les coins du grand carré .

Existe-t-il un cube parfait ?

Revenons au cube parfait. Nous nous sommes basés sur le raisonnement de Brooks en 1940 que nous avons trouvé dans le magazine "Tangente" (n°3, février-mars 1988) qui nous a beaucoup aidés.

Supposons que l'on dispose d'un cube parfait. On s'intéresse alors à une des faces, par exemple: la face inférieure du cube. Cette face est un carré parfait. Comme le plus petit carré ne peut être ni sur coin, ni sur un bord, il est forcément à l'intérieur de la face. Par conséquent le ~~plus petit~~ cube qui repose sur cette face [, sur ce carré] est aussi à l'intérieur, il est donc entouré de "murs" [plus hauts que lui].

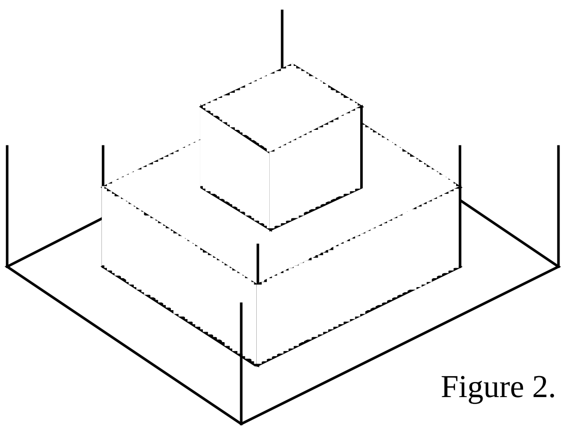

Figure 2.

La face supérieure de ce petit cube est donc aussi un carré parfait dont le plus petit carré est aussi face d'un cube plus petit, élevé sur le précédent (figure 2). [Ce nouveau cube est également entouré de murs plus hauts que lui.] On obtient ainsi une suite de cubes de plus en plus petits, dont les côtés sont des entiers. Il faut que cette suite de nombres entiers s'arrête à un moment. [NDLR. Le raisonnement pourrait maintenant se conclure de la manière suivante : la suite s'arrête nécessairement à la face supérieure du cube (sinon elle continuerait) ; le dernier cube est entouré de cubes plus gros que lui, ce qui est impossible. Les élèves ont préféré obtenir une contradiction en montrant que la suite se termine à l'intérieur du cube …]

Or le plus petit carré sur un carré parfait est de côté *c*, inférieur à la moitié du côté du grand carré donc on obtient une " tour " de cubes dont les côtés sont chacun inférieur à la moitié du côté précédent (figure 3). La hauteur de cette tour est la somme des termes d'une suite infinie.

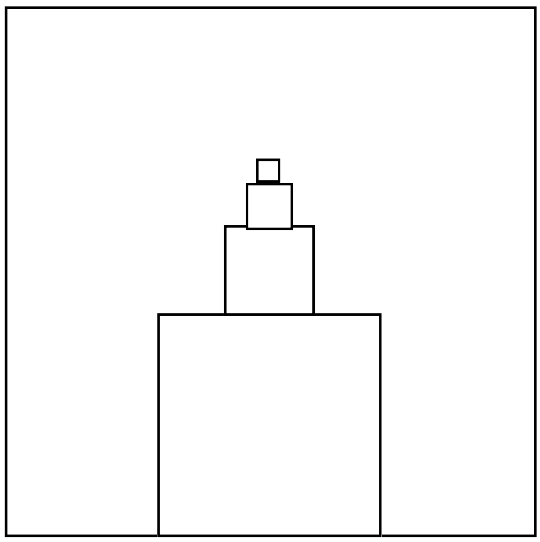

Figure 3.

La tour ainsi formée est donc toute entière à l'intérieur du cube et composée d'une infinité de cubes: ce cube n'est pas un cube parfait car il n'y a pas un nombre ***fini*** de cubes dans la décomposition. **Il n'existe donc pas de cube parfait .**

Retour au carré parfait.

Par contre le problème reste entier pour les carrés parfaits. Nous savons qu'il est possible d'en obtenir. En 1977, Dvijvestijn a montré qu'il en existe, et il en a donné, en 1978, un exemple constitué de 21 carrés tous inégaux: c'est le plus petit carré parfait (figure 4.*a*.). Nous avons essayé de trouver une méthode pour obtenir un carré parfait.

Démarche géométrique

Nous nous sommes rendus compte que cela n'était valable que pour certaines valeurs de côtés, alors nous avons fait des essais (figure 5). Nous avons constaté qu'en assemblant le plus judicieusement possible des carrés, il restait à combler "des trous" en forme de "L" (jonction de deux rectangles) ou en forme de rectangle (figure 6). Si le rectangle restant était parfait, c'est-à-dire découpé en un nom bre fini de carrés dont les côtés sont parallèles aux côtés du rectangle, et dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers tous inégaux, alors on pourrait obtenir un carré parfait. Cela serait possible à condition que les carrés contenus dans le rectangle ne soient pas les mêmes que ceux déjà placés dans le carré.

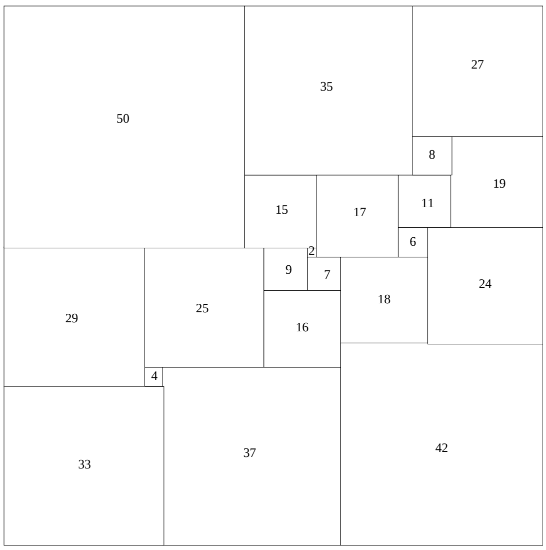

Figure 4.*a*. Le plus petit carré parfait (Dvijvestijn, 1978).

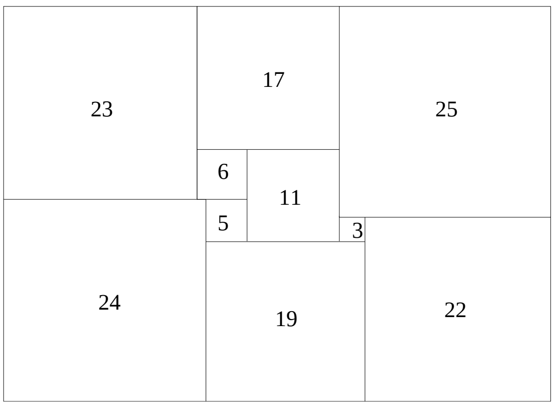

Figure 4.*b*.

Nous savons qu'il est possible d'obtenir un rectangle parfait car en 1925, un mathématicien nommé Moron en a découvert un composé de dix carrés tous inégaux (figure 4.*b*.) ; mais tous les rectangles ne sont pas parfaits …

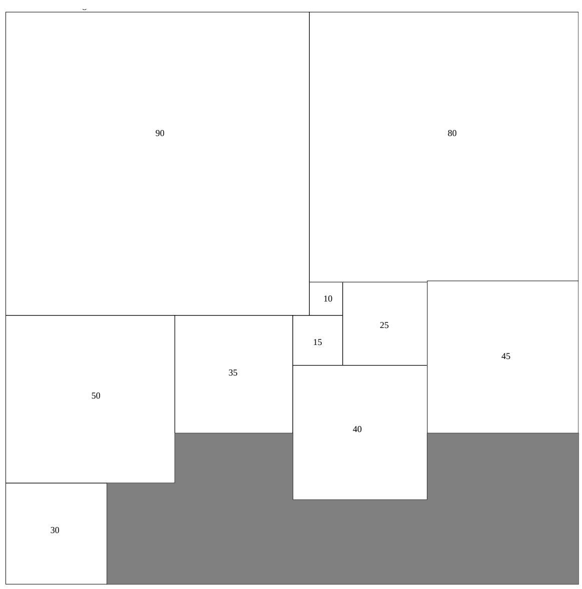

Figure 5.

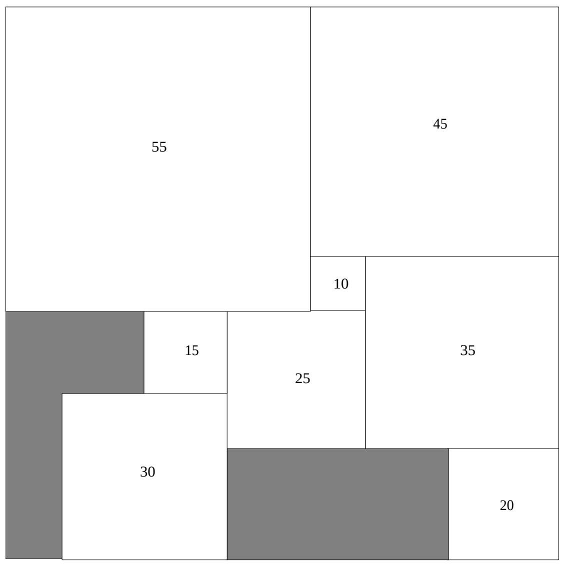

Figure 6.*a*.

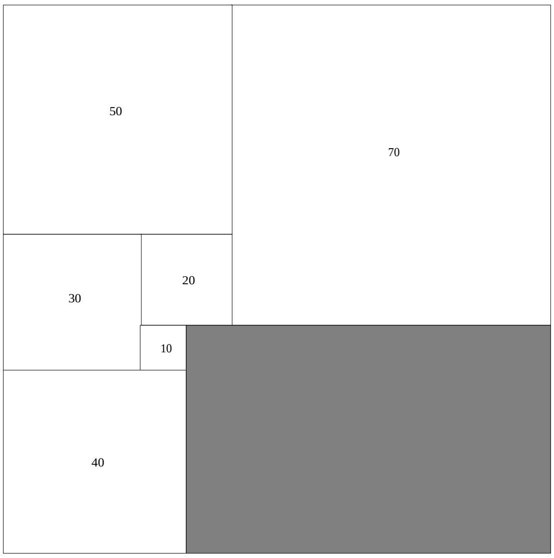

Figure 6.*b*.

En 1966, T.H. Willcocks a trouvé un carré parfait contenant 24 carrés tous inégaux, dont certains forment un rectangle parfait (figure 7).

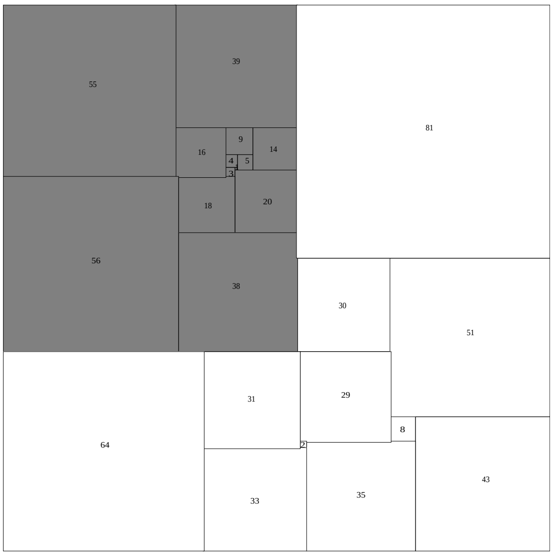

Figure 7.

Nous pouvons conclure à l'existence de carrés parfaits ; mais jusqu'à ce jour nous n'avons pas eu la possibilité d'en trouver un.

On constate qu'il est impossible d'obtenir un carré parfait constitué de 2, 3, 4 carrés, en montrant que la juxtaposition de 2, 3, 4 carrés de côtés différents ne peut donner un carré. Mais jusqu'où peut-on aller ainsi ?

Démarche algébrique [arithmétique ?]

Stéphane Labbé, le chercheur travaillant avec nous, nous a proposé une méthode afin d'essayer d'obtenir un carré parfait et par la même occasion un théorème ou une règle pour le construire. Nous allons vous faire part de cette méthode.

Auparavant, voyons l'aspect numérique du carré parfait.

les côtés et les aires

Définition — carré d'ordre *n*.

Le calcul permet de relever un trait caractéristique de chaque carré parfait : la somme des aires des carrés qui le composent est égale à l'aire du carré qui les contient. Ce qui se traduit par :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = c^2$$

où :

- $n \geq 1$
- c appartient à l'ensemble des naturels
- c_i appartient à l'ensemble des naturels
- c représente le côté du carré qui contient les autres carrés de côté c_i .

Un tel carré est appelé « carré d'ordre *n* ».

L'emploi de nombres entiers uniquement se justifie du fait qu'en multipliant des nombres décimaux par un coefficient assez grand, on trouve encore des nombres entiers. De ce fait, on ne peut inclure de nombres irrationnels dans l'ensemble des ci : la construction est impossible car les carrés ne peuvent coïncider entre eux.

Exemple : 144 = 81 + 36 + 16 + 9 + 2, d'où $12^2 = 9^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 + (\sqrt{2})^2$. Mais :

$9 + 4 > 12$

$6 + 4 + \sqrt{2} < 12$

... ...

De plus, on observe que dans ce cas $n = 5$, or Dvijvestijn a démontré que $n \geq 21$.

On peut essayer de retrouver les côtés des carrés qui le composent selon une méthode dite de « décalage ».

Méthode de « décalage »

Principe. La méthode repose sur le principe suivant : conserver toujours le même nombre de valeurs en supprimant un carré et en rajoutant à la suite un autre carré.

On considère deux droites graduées dont l'une représente les côtés des carrés et l'autre, les aires respectives de ces carrés.

Fonctionnement. Prenons $n = 21$, c'est-à-dire un carré d'ordre 21, puisque c'est la plus petite valeur possible. On a :

$$\sum_{n=1}^{21} n^2 = 3311$$

Or $\sqrt{3311} \approx 57{,}54$ donc $\sqrt{3311}$ n'est pas un entier.

1 2 3........................21

1 4 9.......................441

On ne peut décaler en deçà de 21 ; il faut donc décaler vers le carré suivant qui est 58^2 soit 3364. En décalant vers le haut, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{n=1}^{20} n^2\right) + 22^2 = 3354$$

or 3354<3364.

1....................20 ~~21~~ 22

A l'étape suivante, deux choix sont possibles : soit passer de 20 à 21, soit de 22 à 23, et pourquoi pas de 1 à 21 ou 23, voire plus ? C'est une simple question de méthode, en agissant de la sorte, on risquerait de manquer un éventuel carré ; faire un décalage progressif permet d'analyser toutes les possibilités.

On peut trouver quel serait le meilleur décalage grâce à un tableau récapitulatif qui comporte les carrés d'entiers successifs et la différence entre deux carrés consécutifs.

Entier	Carré	Différence avec le carré précédent
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19
11	121	21

Notons que $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$
$= 2n + 1.$

Ainsi, la différence entre deux carrés successifs, est toujours impaire. On voit que : $58^2 - 3354 = 10$. Or $22^2 - 21^2 > 10$; $23^2 - 22^2 > 10$. Comme il n'y a pas de somme de carrés qui soit égale à 58^2 alors, un carré d'ordre 21, de côté 58 n'existe pas.

Cherchons alors une somme qui soit égale à 59^2 selon le même principe … Cette méthode s'avère longue et compliquée : plus de temps nous serait nécessaire pour aboutir à un résultat concret.

Plusieurs questions restent sans réponse :

• Ne pourrait-on pas trouver une meilleure méthode ?

• En admettant que des données définissent un carré parfait, la construction est-elle toujours possible ?

• Si c'est le cas, par quel moyen ?

Le plus dur reste encore à faire !

Les carrés parfaits existent et répondent à des critères bien précis. Les cubes parfaits pour leur part n'existent pas.

C'est en synthétisant le problème et en l'assimilant que nous sommes arrivés à cette réponse. Supposons que nous n'ayons pas décomposé le problème complexe de départ en éléments plus simples, nous n'aurions pas pu comprendre le problème dans le fond.

Si on vous avait demandé « construisez un cube parfait », l'auriez-vous fait ? Et si vous aviez répondu « Mais c'est impossible! », ne penseriez-vous pas que cette réponse soit prématurée ?

Les problèmes simples ont souvent un comment plus difficile à démontrer que le problème ne le laisse paraître. Les problèmes compliqués se décomposent en problèmes simples. Et on se demande toujours pourquoi la réponse est pourtant simple.

— Pourquoi vous êtes-vous intéressé à ce problème ?
— Et pourquoi pas ?
— Ce serait une réponse, mais c'est plus compliqué !

[NDLR : Le plan est-il parfait ? Plus précisément, peut-on découper le plan de manière à obtenir tous les carrés de côté entier, chacun une fois et une seule ? Nul n'a de réponse à cette question.]