exemples de surfaces minimales

par Mme Laure Quivy, Université Paris XIII

[Transcription de l'enregistrement audio de la conférence.]

Pierre Duchet :

Je laisse la parole au président de séance pour cet après-midi, qui doit être François Parreau, je pense …

François Parreau :

… Laure Quivy, qui va vous parler de surfaces minimales. Apparemment elle a quelques expériences à vous montrer …

[applaudissements]

Mme Laure Quivy :

Voilà, après on peut s'amuser, oui.

Le public :

Ah ouais !

Mme Laure Quivy :

J'espère simplement que vous arriverez à voir. Je suis très heureuse de m'adresser à un public si jeune, et qui visiblement aime beaucoup les mathématiques. Je remercie aussi les organisateurs.

Puisque vous vous intéressez tous aux mathématiques, je voudrais vous montrer que les maths sont partout, (peut-être le saviez-vous déjà ?), et comme je ne veux pas écrire des grosses équations (en recherche souvent on écrit de grosses équations), je voulais illustrer autrement mon exposé : je vais vous parler de surfaces minimales en vous en montrant grâce à des bulles de savon.

Je vais un petit peu expliquer quel est le problème. En fait, il est assez simple ; maintenant il est vrai qu'il y a beaucoup de mathématiques derrière, et comme je vais le dire, beaucoup de recherches ont été faites sur ce sujet. Les équations sont un petit peu compliquées, mais le problème physique est relativement simple. Donc je vais essayer d'illustrer un petit peu tout ça.

Vous savez déjà que les sciences sont quasiment tout le temps faites d'observations ; quand vous êtes dans votre bain ou que vous jouez à faire des bulles de savon, ces bulles ont une forme sphérique. Pourquoi une sphère ? Parce que c'est ce qui coûte le moins cher à la nature.

Si vous voulez, on peut le comprendre de la façon suivante : vous avez peut-être déjà entendu parler, en mathématiques ou en physique de la notion d'énergie; eh bien ce qui coûte le moins cher c'est ce qui demande le moins d'énergie.

En fait, on dit toujours qu'on a envie de se fatiguer le moins possible ; pour la nature c'est pareil : elle va toujours essayer de trouver des configurations telles que l'énergie soit minimale. D'où la forme des bulles de savon qui sont toujours sphériques. En effet, minimiser l'énergie dans le cas des bulles de savon revient à minimiser la surface qui contient le volume de la bulle.

Alors, sans parler de bulles, je vais vous parler du problème de Plateau. Plateau est un physicien belge, qui posa le problème suivant en 1840 : connaissant un contour, n'importe quel contour, comme celui-ci par exemple [images de contour métallique], (pour l'instant je le fais dans le plan, sur le tableau), peut-on trouver la surface qui adhère au contour et qui soit une surface minimale, c'est-à-dire qui ait une aire minimale ?

Alors évidemment, quand vous essayez, vous dites oui. Si je trempe ce contour dans de l'eau savonneuse, eh bien, la surface définie par le film de savon va coller exactement au contour et va être complètement plane, elle ne fera ni bosses ni creux, elle sera plane parce qu'elle va chercher à être de surface minimale. C'est comme les bulles de savon : surface minimale, donc énergie minimale.

Je peux peut-être vous montrer, sur un contour très simple [démonstration sur un contour simple ; voir la figure 1] ? Ici, la surface est plane, et c'est une surface minimale. Alors, évidemment, Plateau avait conjecturé, c'est-à-dire qu'il avait dit qu'il existait des surfaces minimales, puisque la nature le montrait, mais il ne savait pas démontrer ces résultats.

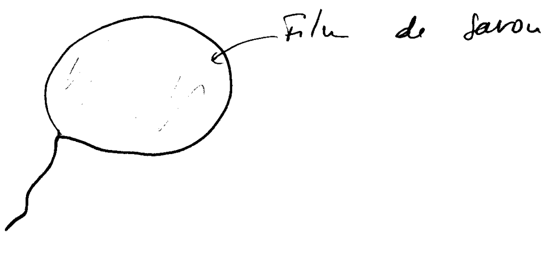


Figure 1.

Alors ce n'est qu'un siècle après, (vous voyez que, quelquefois on a des bonnes idées sans pour autant résoudre un problème, on pense à de bonnes choses mais on n'arrive pas clairement à dire « oui c'est vrai »), que l'on s'est à nouveau intéressé aux surfaces minimales. Et puis, en maths, souvent quand on parle d'existence on a envie de savoir si on a aussi unicité, c'est-à-dire : pour une configuration donnée, a-t-on une unique surface minimale possible ? En existe-t-il plusieurs ou est-ce que pour un contour donné, il ne va en exister qu'une ?

Il a fallu attendre près de cent ans, puisque, c'est en 1930, que les mathématiciens, Douglas et Rado ont démontré qu'en effet il existait toujours des surfaces minimales, mais qu'elles n'étaient pas nécessairement uniques. C'est ce que je vais essayer de vous montrer.

Voyons si vous avez aussi autant d'intuition que Plateau. Je fais l'expérience [Expérience].

Si je prends ce contour, c'est comme ce que j'ai montré tout à l'heure, si vous voyez bien, il y a une surface minimale.

Alors premier problème pour l'instant je suis dans un plan, en dimension deux, mais que se passe-t-il si je mets deux surfaces [expérience avec les deux surfaces se rapprochant] ?

Tout d'abord, j'ai deux surfaces minimales. A votre avis, que va-t-il se passer ? Si vous avez un peu compris ce que j'appelle une surface minimale, que va-t-il se passer quand les deux surfaces seront très proches ?

Le public :

— […]

Mme Laure Quivy :

Une surface maximale ? [rires] Oh, elle va être infinie ma surface maximale. Alors, que va-t-il se passer ?

Le public :

— [Ça va en faire qu'une seule.]

Mme Laure Quivy :

Une seule, entre les deux ?

Le public :

— […]

Mme Laure Quivy :

[Les deux surfaces sont approchées.] Alors, regardez. Je le refais. Qu'est-ce qui se passe ?

Le public :

— [Une sorte de tuyau, une sorte de cylindre.]

Mme Laure Quivy :

Voilà, cette surface s'appelle une caténoïde. Voyez-vous ce qui se passe ? Le film de savon n'adhère pas sur chacune des surfaces, mais la nature essaye de faire adhérer les deux objets que je montre. Tout le monde voit ?

Le public :

— [¿¿¿ Non. ???]

Mme Laure Quivy :

Evidemment, il aurait fallu que j'aille à la pharmacie acheter du glycol pour que ça marche mieux, mais il n'y avait pas à cinq degrés, donc ... [rires] [NDLR : pour comprendre, voir l'anecdote de Pierre Duchet dans l'inauguration officielle du congrès, qui précéda cette conférence.].

Donc, je recommence, en essayant que ça marche. Elles sont rapprochées, je les écarte, j'ai, ce qu'on appelle une caténoïde. Tout le monde le voit ? [rires] Vous êtes durs avec moi, hein. Voilà, ah, il est beau en plus !

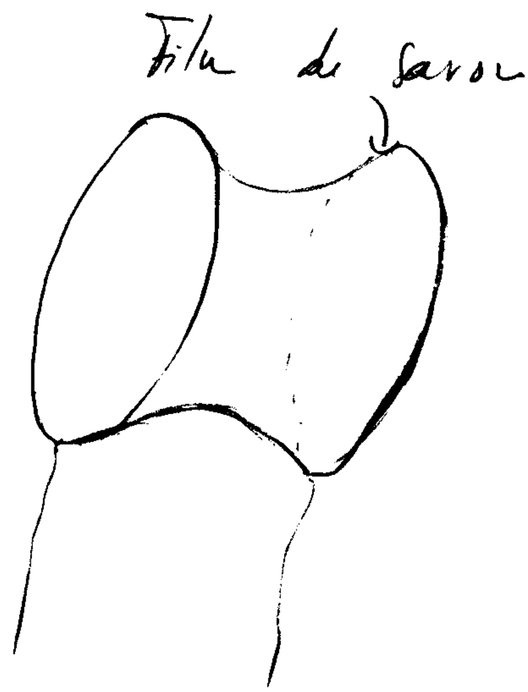


Figure 2.

Le public :

— Aaaah !

Mme Laure Quivy :

Et voilà, et je vous ai montré le résultat final. J'essaye de le faire une dernière fois.

Maintenant, je vais vous montrer un changement de surface minimale, c'est ce que l'on appelle aussi en mathématiques des problèmes de bifurcation. Bifurcation, c'est-à-dire que l'on passe d'une solution à l'autre, parce que finalement ce que je vous ai montré, la caténoïde, c'est une solution du problème à partir du moment où mes deux objets, enfin le contour, donc, a la forme que je vous ai montrée.

Donc j'ai une caténoïde, suivant l'écartement entre mes deux objets, et vous pouvez bien penser que, au départ, j'ai la caténoïde, donc une surface minimale.

Plus j'éloigne les deux objets, plus ça va demander de surface entre les deux. Elles vont donc se casser, d'accord ?

Donc au départ je prends la surface en caténoïde, cette espèce de cylindre déformé qu'il y a autour, c'est ce qui occupe une surface minimale parce que les objets sont suffisamment rapprochés, la distance étant petite ici, la surface ne va pas être très importante.

Maintenant, si je les écarte trop, eh bien, vous allez bien comprendre que, le fait que les deux surfaces comme au départ soient une surface de l'objet, ça va coûter moins cher que de faire une grande caténoïde. Vous voyez ce que je veux dire ? Maintenant je change un paramètre, le paramètre c'est l'écartement entre les deux objets, et c'est ce qu'on appelle une bifurcation puisque, ma solution, surface minimale, va changer de configuration.

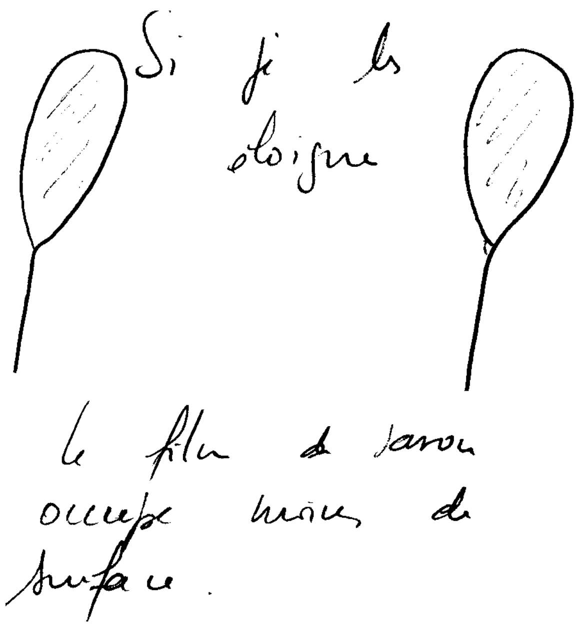


Figure 3.

J'essaye de vous le refaire : là j'ai la caténoïde et hop, j'ai écarté et maintenant ça s'est changé en deux surfaces, indépendantes, qui sont comme celles-ci, parce que, il arrive un moment où le fait d'avoir la caténoïde coûtait plus cher que d'avoir deux surfaces indépendantes. Alors le problème, c'est que je ne peux pas le remettre après, donc je le refais, voilà, j'ai la caténoïde, j'écarte de plus en plus, et hop ça coûte moins cher, d'accord ? Donc évidemment, il y a des grandes équations derrière, parce que cela revient à faire des problèmes de minimisation.

Pour ceux qui en savent un peu plus, on minimise des énergies, ces énergies sont des intégrales, avec pleins de termes non-linéaires à l'intérieur, alors évidemment, ce qu'ont fait Douglas et Rado, ce sont des grandes études théoriques sur le papier, ils n'ont pas fait simplement l'expérience. Ils ont écrit plein d'énergies qu'ils ont cherché à minimiser.

Ensuite je voulais vous montrer les singularités. Ce qu'on a vu, c'est la surface minimale ; on a vu qu'elle pouvait changer d'état, donc qu'il y avait une bifurcation. Maintenant on va parler de singularités. Douglas et Rado ont continué à travailler ce problème, et ils ont dit : on peut avoir des singularités. Donc je vais vous montrer ce que sont les lignes de singularité et les points de singularité. Prenons une petite pyramide [expérience], je la trempe, quelqu'un devine-t-il le résultat ?

Le public :

— [Pyramide ! Un tétraèdre !]

Mme Laure Quivy :

Pensez-vous que ce sont les quatre faces, qui vont se remplir ?

Le public :

— Ah ouais, ah ouais !

Mme Laure Quivy :

Vous pensez que ce serait minimum ?

Le public :

— Ouais !

Mme Laure Quivy :

Eh bien non, ce n'est pas minimum. Vous voyez, ce ne sont pas les quatre surfaces de mes triangles. Donc le film de savon ne va pas remplir les quatre surfaces, mais va aller vers l'intérieur, et (j'espère que vous le voyez) : on observe quatre lignes à l'intérieur de la pyramide, où les surfaces minimales se croisent. J'ai en particulier, un point où les arêtes se recoupent.

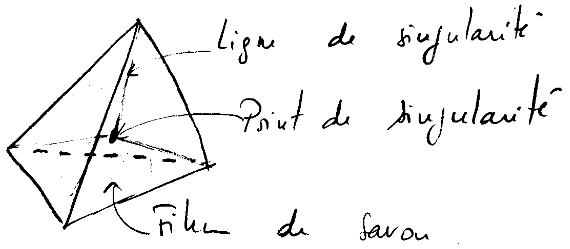


Figure 4.

Alors, justement, ces lignes s'appellent des lignes de singularité, et singularité parce qu'on a des surfaces qui se croisent avec des angles, des angles précis et justement les mathématiciens ont démontré que dès que l'on avait des singularités, donc dès que l'on avait des intersections de surfaces minimales, ces surfaces forment forcément un angle de 120 degrés entre elles. Tout le monde sait ce que c'est un angle de 120 degrés ? Alors, un angle de 120 degrés, justement, vous allez me dire évidemment c'est facile votre truc, parce que déjà on pouvait en trouver des angles de 120 degrés dans le cadre.

Le public :

— [remous]

Mme Laure Quivy :

Deux angles de 60 degrés, ça fait 120 degrés. Vous allez me dire c'est parce que j'ai quelque chose de bien symétrique que j'ai 120 degrés avec mes surfaces. Donc voilà : lignes de singularité et point de singularité.

Donc, vous voyez, il y a encore des travaux mathématiques qui ont su démontrer théoriquement que les surfaces minimales avaient des singularités et qu'elles s'intersectent à 120 degrés.

Le public :

— [remous]

Mme Laure Quivy :

Alors ensuite, je peux vous le faire avec ça, et vous allez voir une grande ligne de singularité. Vous voyez, c'est pareil, ici vous avez une grande ligne de singularité, et puis ici des petites [nouveaux cadres plongés dans de l'eau savonneuse]. Je voudrais vraiment que vous voyiez qu'il essaye vraiment d'y avoir la surface la plus petite possible. Et que si c'étaient les surfaces classiques qui étaient ici qui étaient recouvertes, ça prendrait plus de film en savon, plus de papier si vous le recouvrez de papier.

Donc voilà une belle surface minimale avec des lignes de singularité, des points de singularité, avec toujours des angles de 120 degrés entre chaque.

Maintenant qu'est-ce qui va se passer là-dessus ? Vous voyez, ce sont des expériences que vous pouvez très facilement faire chez vous.

Le public :

— [Où est-ce qu'on achète ! Ouais, où est-ce qu'on achète ces cadres ?]

Mme Laure Quivy :

Alors, ça, c'est très compliqué, ils ont été achetés aux Etats-Unis.

Vous voyez c'est pareil : si toutes les surfaces étaient pleines, ça prendrait plus de surface, plus de film de savon que là [nouvel exemple avec un cube].

Alors, vous constatez qu'on a encore des lignes de singularité, et puis, un petit carré au milieu, parce que, en fait, mon cube n'était pas parfait au départ. Est-ce que vous voyez, quand je le sors de l'eau, comment ça se construit ?

Le public :

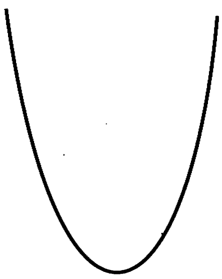
— Oui.

Mme Laure Quivy :

Au début il y a trop de surface, donc ce n'est pas un équilibre et ça diminue, ça diminue, ça diminue, et puis là ça reste en équilibre. Quand quelquefois les surfaces disparaissent, c'est parce que j'ai soufflé trop fort ou parce que je les ai touchées ; mais normalement, ça peut rester très longtemps. Là, j'ai la surface minimale. Alors que juste quand je le sors, regardez bien, il va la chercher cette surface minimale. Et hop ! D'accord ? Parce qu'il minimise son énergie.

Après je n'arrive plus à les enlever ! [rires] Et enfin, pour finir — en même temps j'ai fait la vaisselle, parce que c'est du liquide vaisselle que j'ai mis dedans, bien évidemment — et là, qu'est-ce qui va se passer ? Parce que là je ne vous ai montré que des arêtes qui étaient des droites ! Vous avez vu ?

Alors, là, il y a une jolie courbe, et ceux qui en savent un peu plus aussi, vous voyez qu'ici, on a une courbe, comme ça, donc on a une surface courbe.



Eh bien, si vous regardez l'équation de cette courbe, c'est ce qu'on appelle une chaînette, ce sont des sinus et des cosinus hyperboliques. Donc vous voyez, il y en a même dans la nature, tout va bien.

Alors ce qui est bien avec ça, c'est que, en fait, (je ne sais pas si je vais réussir à vous le faire, c'est un peu compliqué) : si maintenant je fais une rotation, je laisse celui-là et que je fais une rotation, j'obtiens encore la même chose, ça n'a pas bougé, d'accord ? Alors vous pouvez dire qu'il y a la force de la pesanteur, (il ne faut pas souffler trop fort!), eh bien donc ça n'a pas bougé. Alors justement, je vais essayer de vous la faire cette rotation, et je finirai par ça, donc j'étais partie de quelque chose comme ça, c'était fermé là, et celui-là si je le mets en rotation, il se retrouve ici.

Alors je vais essayer. Je vais finir par ça, parce que je ne sais pas si je n'ai pas dépassé le temps ; c'est intéressant, hein ?

Le public :

— Ouais. [rires]

Mme Laure Quivy :

Vous ne prenez pas tout le liquide vaisselle. A mon avis maintenant vous allez bien aimer faire la vaisselle. Mais, vous avez vu, vous pouvez avec du fil comme ça, construire des surfaces n'importe comment et vous allez regarder un petit peu quels sont les types de surfaces minimales que vous allez obtenir. C'est très facile à faire et très intéressant.

Alors j'essaie de faire celle-ci, et voilà ! Et puis vous voyez que je peux répéter à l'infini comme ça, puisque j'ai fait des rotations, donc je refais à nouveau des rotations, et puis je peux avoir, en prenant un truc très très grand comme ça, je peux avoir de belles surfaces comme ceci, bien symétriques, et tout ce qu'il faut.

Ça vous a plu ?

Le public :

— Oui ! [applaudissements]

Mme Laure Quivy :

Alors, pour ceux qui veulent en savoir un peu plus, j'ai parlé de surfaces minimales en dimension deux, j'en ai montré ici, j'ai fait aussi des surfaces minimales en dimension trois. J'ai parlé de surfaces minimales, et d'énergie minimale, eh bien on peut montrer aussi qu'en dimension trois, que c'est le rayon de courbure moyenne, qui est toujours minimum, dès que l'on a une surface minimale.

[applaudissements nourris]

Peut-être avez vous des questions ?

Le public :

— Oui. [inaudible]
— Qu'est-ce que ça fait alors, si on souffle dessus ? [rires]

Mme Laure Quivy :

Ah bien si on souffle, vous avez bien vu, parce qu'à un moment la surface a disparu, et elle a disparu parce que j'ai parlé trop fort, et j'ai soufflé dessus, et donc, comme elle est juste à l'équilibre, si on la perturbe un petit peu elle peut disparaître.

M. Stéphane Labbé :

— Y a-t-il d'autres questions ? Merci.

Mme Laure Quivy :

Alors vous voyez la prochaine fois, pour MATh.en.JEANS, vous pouvez exposer ça, vous pouvez trouver de belles surfaces et puis essayer de les montrer, c'est un bon atelier.

[NDLR : *ci-après, les preuves que l'envie a été donnée : séance suivante à la MJC Daniel André de Bobigny* …]