coloriage de cartes

par Céline Sanchez, Faculté de Luminy (1ère année)

enseignant : Laurent Beddou

chercheur : Christian Mauduit

— coloriage des cartes

Quel est le nombre minimal de couleurs permettant de colorier tous les pays d'une carte telle que deux pays ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur ?

Peut-on colorier chaque pays d'une carte avec un nombre minimum de couleurs sachant que deux pays ayant une frontière en commun ne doivent pas avoir la même couleur ?

Si nous étudions le problème avec des dessins de cartes comme nous avons l'habitude, il devient vite difficile, pour un nombre n assez grand, de déterminer quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire et suffisant pour colorier une carte de n pays quelconques. Ainsi, il est utile de passer aux graphes.

En effet, nous allons adopter **la modélisation** suivante :

• chaque pays sera représenté par un sommet.

• chaque frontière entre deux pays sera modélisée par **une arête** entre les deux sommets correspondants. Si un pays a plus d'une frontière avec un autre pays (cela peut arriver), alors nous ne tracerons qu'une seule arête entre les deux sommets car cela ne change rien quant à la couleur des deux pays.

Remarque : [On peut voir que les] graphes considérés sont des graphes « planaires », c'est-à-dire pouvant être représentés dans le plan avec pour sommets des points distincts et pour arêtes des chemins qui ne se rencontrent qu'en leurs extrémités.

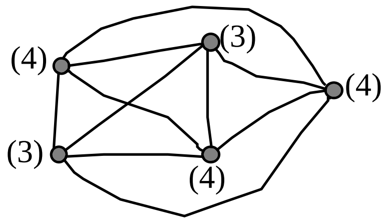
[**NDLR**. Les indications qui nous ont été fournies sur cette étude ne nous ont pas permis de la vérifier. Nous reproduisons ci-après la toute première partie du manuscrit concluant, d'une manière qui ne nous a pas convaincus, à l'inexistence, pour $n \geq 5$, d'un graphe planaire à n sommets où chaque sommet serait relié à tous les autres.]

[**NDLC**. Pour une autre étude du même problème, voir les actes MATh.en.JEANS 1995, *Polyèdres et formule d'Euler*, pages 63-82, et les actes MATh.en.JEANS 1992, page 123.]

Première ETUDE

Conjecture : Il est possible que pour une carte de n pays, n entier ($n > 1$), chaque pays soit frontalier aux ($n - 1$) autres.

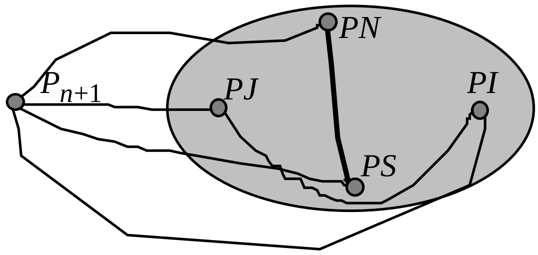
En passant aux graphes, nous remarquons que la conjecture est vraie pour $n = 2, 3, 4$. Pour $n = 5$ on a :



Nous remarquons que deux sommets sont de degré 3 ; en effet, il est impossible de tracer une arête liant ces deux sommets.

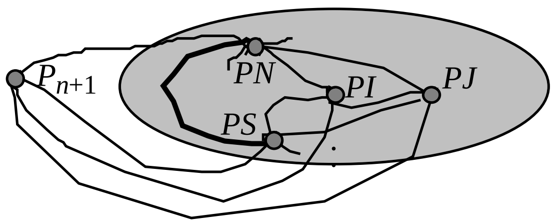
La conjecture est apparemment fausse.

Supposons que la conjecture est vraie au rang n, n entier ($n > 1$) et essayons de voir s'il existe un graphe d'ordre ($n + 1$) vérifiant la conjecture.



En prenant le pays le plus au nord (*PN*)et le plus au sud (*P*S) liés par hypothèse, on trace des arêtes pour créer un graphe d'ordre (n+1). Seulement, l'arête entre *PI* et *PJ* ne peut exister ce qui est absurde par hypothèse (ils doivent être liés.).

Considérons l'autre cas :



Ici, dans le cas où tous les sommets sont du même côté de l'arête liant *P*S et *PN* nous aboutissons aussi à une contradiction. Pour un nombre entier n ($n \geq 5$) de pays, chacun ne peut donc pas avoir ($n - 1$) voisins.