le chemin
le plus rapide

par Thomas Quié, élève de Seconde du Lycée Georges Braque d'Argenteuil (95)

enseignants : Joëlle Richard et Halim Yahiaoui

chercheur : Stéphane Labbé

lycée Georges Braque d'Argenteuil (95) — ***vitesse de passage donnée***
Une vitesse de passage est donnée en chaque point. Quels est le chemin le plus rapide ? est-il unique ?

Voici le sujet qui m'a été proposé :

« Dans un domaine, une vitesse de passage est définie en chaque point pour un mobile. Quel est le chemin le plus rapide ? »

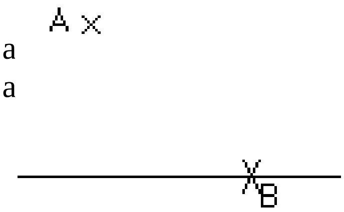
J'ai abordé ce sujet en le simplifiant. J'ai imaginé, sur une plaine traversée par une route *R*, un mobile devant se déplacer d'un point *A* à un point *B*. Je suppose que hors de la route, il a une vitesse *V* et que sur la route, sa vitesse est *kV*, où *k* est un coefficient numérique positif.

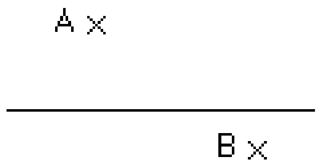
Par exemple, si $k = 2$, le mobile pourra doubler sa vitesse sur la route.

Je suppose que le mobile parcourt de manière uniforme des segments rectilignes.

On peut considérer 3 cas :

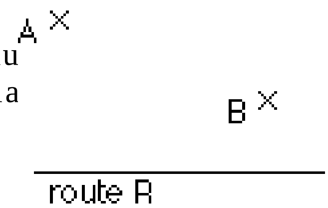
• *A* est hors de la route, *B* est sur la route *R*.



• 

A et *B* sont de part et d'autre de la route *R*.

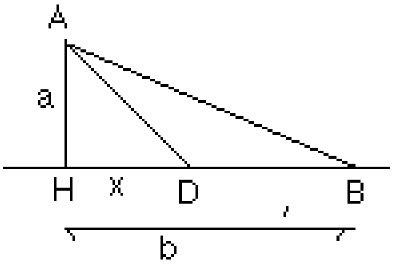
• *A* et *B* sont du même côté de la route *R*.



Premier cas.

Dans le premier cas, le point *A* est hors de la route et le point *B* est sur la route, comme sur la figure ci-dessous.

a est la distance *AH*, *b* est la distance *HB* et *x* la distance *HD*.



V est la vitesse sur la route. On cherche la position du point *D* pour que le chemin *ADB* soit le plus rapide.

On peut décomposer le chemin *ADB* en deux segments [*AD*] et [*DB*] sur lesquels les temps de parcours seront :

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} \text{ et } t_2 = \frac{b - x}{kV}.$$

Les mouvements sont uniformes. Le temps de parcours sur *ADB* sera donc :

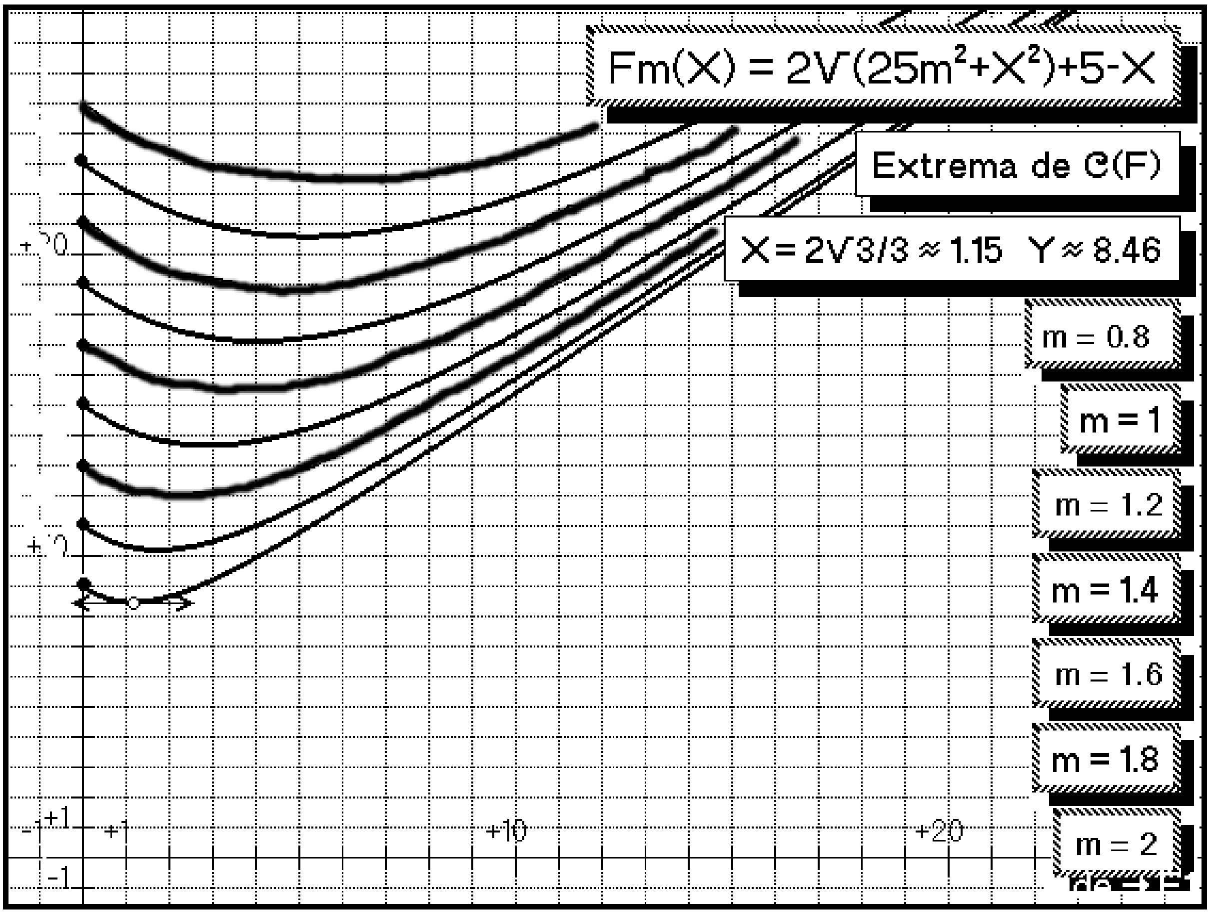
$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} + \frac{b - x}{kV} = \frac{k\sqrt{a^2 + x^2} + b - x}{k\,V}$$

Désignons par m la tangente trigonométrique de l'angle $\widehat{ABH}$. On a donc : $m = a/b$. Nous avons donc remplacé la valeur *a* par *bm* et nous obtenons :

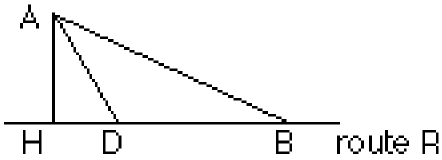
$$f(x) = \frac{k\sqrt{b^2\,m^2 + x^2} + b - x}{k\,V}$$

Nous cherchons le minimum de $f(x)$. Pour cela, nous traçons le graphe de $f(x)$ à l'aide d'un ordinateur. Nous nous donnons les valeur suivantes pour *b*, *k* et *V* : $b = 5$, $k = 2$, $V = 1/2$. Nous faisons varier *m*.[cf ci-dessous]

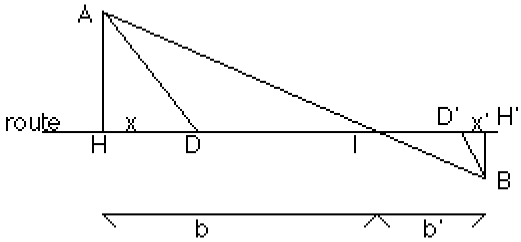
Nous constatons que plus *m* est faible, plus la valeur de *x* pour laquelle $f(x)$ est minimum est proche de zéro.



Donc le point D est d'autant plus proche de H que la valeur de m est petite et donc que A est plus proche de la route.



Deuxième cas.
A et B sont de part et d'autre de la route comme dans la figure ci-dessous.



Les droites (AH) et (BH') sont parallèles car la nouvelle route est perpendiculaire aux deux droites. D'après le théorème de Thalès, les triangles AHI et BHI' sont semblables. On cherche à placer les points D et D' de sorte que le chemin $ADD'B$ soit le plus rapide. On obtient :

$$\frac{b}{x} = \frac{b'}{x'}$$

Le temps pour parcourir $ADD'B$ sera alors :

$$T = \frac{k\sqrt{b^2m^2+x^2}+b-x}{k\,V} + \frac{k\sqrt{b'^2m^2+x'^2}+b'-x'}{k\,V}$$

Comme $x' = \dfrac{b'}{b}x$ on obtient T en fonction d'une seule variable x :

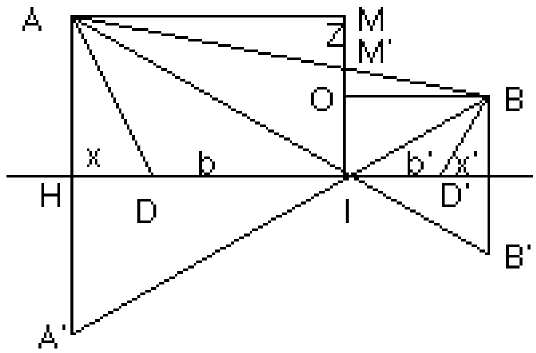
$$T = \frac{k\sqrt{b^2m^2+x^2}+b-x}{k\,V} + \frac{k\sqrt{b'^2m^2+\frac{b'^2}{b^2}x'^2}+b'-\frac{b'}{b}x'}{k\,V}$$

$$T = f(x) = \frac{k\sqrt{b^2m^2+x^2}+b-x}{k\,V} + \frac{k\frac{b'}{b}\sqrt{b^2m^2+x^2}+\frac{b'}{b}(b-x)}{k\,V}$$

$$T = f(x) = \left(1+\frac{b'}{b}\right)\frac{k\sqrt{b^2m^2+x^2}+b-x}{k\,V}$$

f est de la même forme que dans le premier cas. Donc on obtient des résultats analogues. On peut donc dire que plus m est petit, plus les points A et D (respectivement B et D') sont proches de H (respectivement de H').

Troisième cas.
Dans le troisième cas, les deux points A et B sont du même côté de la route R, comme sur la figure ci-dessous :



Z est la distance de M à M' et y celle de M' à O. $AMIH$ et $BOIH'$ sont des rectangles. Les deux droites (AA') et (BB') toutes deux perpendiculaires à (HH') sont parallèles. Les deux triangles $AA'I$ et $BB'I$ sont donc semblables d'aprés le théorème de Thalès.

De même, (AM) et (BO) sont perpendiculaires à (MM'), donc parallèles. AMM' et BOM' sont donc aussi semblables.

Il existe deux chemins pour aller de A à B : le chemin $AM'B$ et le chemin $ADD'B$. Le temps mis sur $AM'B$ est :

$$T_2 = \frac{AM'}{V} + \frac{M'B}{V}$$
$$= \frac{\sqrt{AM^2+MM'^2}+\sqrt{M'O^2+OB^2}}{V}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2+z^2}+\sqrt{y^2+b'^2}}{V}$$

Le temps mis sur $ADD'B$ est :

$$T_3 = \frac{k\sqrt{b^2m^2+x^2}+b-x}{k\,V} + \frac{k\sqrt{b'^2m^2+x'^2}+b'-x'}{k\,V}$$

Nous constatons que T_3 est identique à T ou $f(x)$ trouvé précedemment .

Nous cherchons à placer les points D et D' de manière que le chemin $ADD'B$ soit le plus rapide. Les triangles AHI et BHI' ainsi que AMM' et $M'OB$ étant semblables, on peut se contenter de calculer le temps mis sur AM et ADI. Le temps mis sur AM sera donné par la fonction F telle que

$$F(z) = \frac{\sqrt{b^2 + z^2}}{V}$$

et le temps mis sur ADI par la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{k\sqrt{b^2\, m^2 + x^2} + b - x}{k\, V}$$

On obtient donc le chemin le plus rapide pour toute la figure.

Dans les trois cas examinés, nous pouvons donc déterminer un point sur la route pour lequel le chemin est le plus rapide, mais avec l'hypothèse que les mouvements sont uniformes.

Le problème reste entier si la vitesse n'est pas constante sur les chemins traversés et si la route R n'est pas rectiligne.